

بسم الله الرحمن الرحيم

پاسخ سوالات درس
ریاضیات گسسته

در آزمون ارشد ۹۹

مهندسی فناوری اطلاعات

ابوالفضل گیلک

گروه بابان

@abolfazlgilak

عصر پنجشنبه
۱۳۹۹/۵/۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۹

مجموعه مهندسی فناوری اطلاعات (IT) - کد (۱۲۷۶)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس مشترک (ساختمان‌های گسسته، ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم، مهندسی نرم‌افزار، شبکه‌های کامپیوتری)	۳۰	۳۱	۶۰
۳	اصول و مبانی مدیریت	۲۰	۶۱	۸۰
۴	مجموعه دروس تخصصی مشترک (اصول طراحی پایگاه داده‌ها، هوش مصنوعی، سیستم‌های عامل)	۲۰	۸۱	۱۰۰

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۹

دروس مشترک (ساختمان‌های گسسته، ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم، مهندسی نرم‌افزار، شبکه‌های کامپیوتری):

۳۱- ضریب XYZUV در بسط $(x+y+z+u+v)^5$ چند است؟

- | | |
|--------|---------|
| ۱ (۱) | ۵ (۲) |
| ۲۴ (۳) | ۱۲۰ (۴) |

پاسخ: گزینه (۴)

حدهای مورد نظر این است:

$$x^1 y^1 z^1 u^1 v^1 \binom{5}{1,1,1,1,1}$$

$$\text{ضریب} = \frac{5!}{1} = 120$$

۳۲- فرض کنید G یک گراف جهت‌دار n رأسی با حداقل ۵ رأس است، که بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال جهت‌دار وجود دارد. چند تا از گزاره‌های زیر در خصوص G همیشه صحیح است؟

• G دارای حداقل یک دور جهت‌دار است.

• G دارای مسیر اویلری است.

• G دارای مسیر همیلتنی است.

(۲) ۱

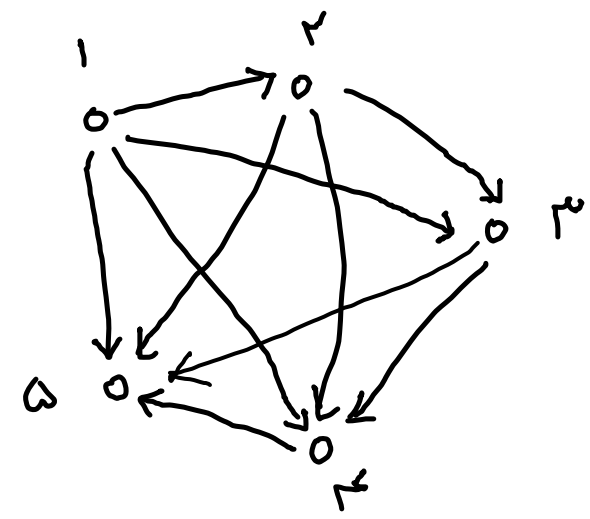
(۱) ۰

(۴) ۳

(۳) ۲

پاسخ: گزینه (۲)

G یک تورنمنت است. (گراف کامل جهت دار) اگر رئوس G را $1, 2, \dots, n$ نام ببریم و جهت یال‌ها از اعداد کوچک به سمت اعداد بزرگ باشد، می‌بینیم که G شامل هیچ دوری نخواهد بود.



همین مثال، مسیر اویلری هم ندارد.

اما هر تورنمنت دارای حداقل یک مسیر همگونی است. این قضیه قایل اثبات با تقوای است.

مثلاً در این گراف $1, 2, 3, 4, 5$ مسیر همگونی است.

۳۳- با توجه به دو گزاره زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف - اگر g تابعی پوشا و f تابعی یک به یک باشد، آن گاه $f \circ g$ پوشا است.

ب - اگر f و g توابعی پوشا باشند، آن گاه $f \circ g$ پوشا است.

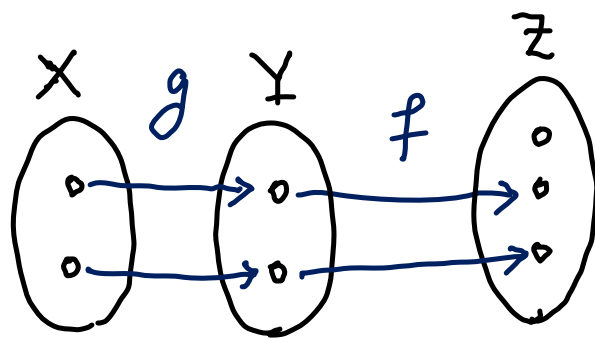
(۱) (الف) درست، (ب) درست

(۲) (الف) درست، (ب) نادرست

(۳) (الف) نادرست، (ب) درست

(۴) (الف) نادرست، (ب) نادرست

پاسخ: گزینه (۳) ترکیب دو تابع پوشا، پوشا است.
 ترکیب دو تابع یک به یک، یک به یک است.



مثال نقض برای (الف) این است:

$f \circ g$ پوشا ندره است.

۳۴- اگر w_n تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a, b و c باشد که تعداد زوجی a دارند، آن‌گاه کدام رابطه

بازگشتی برای w_n برقرار است؟

$$w_n = 4w_{n-1} - 2w_{n-2} \quad (۲)$$

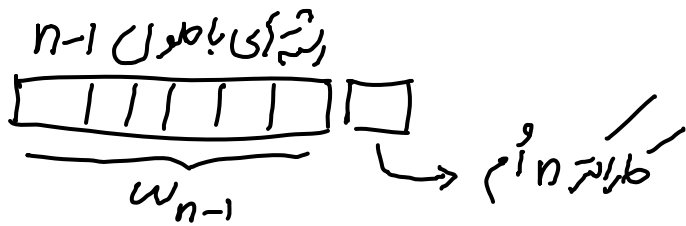
$$w_n = 2w_{n-1} + 2w_{n-2} \quad (۴)$$

$$w_n = 4w_{n-1} - 2w_{n-2} \quad (۱)$$

$$w_n = 2w_{n-1} - 2w_{n-2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه (۲)

پاسخ: گزینش (۲)



تعداد کل رشته‌های به طول $n-1$ ، 2^{n-1} است.

هر رشته‌ای معتبر به طول $n-1$ تبدیل به 2 رشته معتبر به طول n می‌شود. هر رشته‌ای نامعتبر به طول $n-1$ تبدیل به یک رشته معتبر به طول n می‌شود پس:

$$w_n = 2w_{n-1} + (2^{n-1} - w_{n-1})$$

$$(1) \quad w_n = w_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$(2) \quad w_{n-1} = w_{n-2} + 2^{n-2}$$

همین رابطه را برای w_{n-1} بنویسیم و قیمت نا همگی را حذف کنیم:

$$w_n = 2w_{n-1} - 2^{n-2}w_{n-2}$$

معادله دوم را در 2 ضرب کنید و بعد دو معادله را از هم کم کنید:

توجہ:

پانچ سالہ درجہ کی طلبہ کی تعداد: اگر یہ جہاں ۳ کارکن، $p > 1$ کارکن دائرہ ہائے باقی:

$$w_n = (p-1) w_{n-1} + (p - w_{n-1})$$

$$\Rightarrow w_n = p + (p-2) w_{n-1}$$

فرد نہیں جواب:

و اگر فرد میں راغب ہوں:

$$w_n = (2p-2) w_{n-1} - p(p-2) w_{n-2}$$

۳۵- با توجه به دو گزاره زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف - ترتیب اعمال بستار ترايایی و بازتابی روی یک رابطه، در رابطه نهایی به دست آمده تأثیری ندارد.

ب - ترتیب اعمال بستار ترايایی و تقارنی روی یک رابطه، در رابطه نهایی به دست آمده تأثیری ندارد.

(۱) (الف) درست، (ب) درست

(۲) (الف) درست، (ب) نادرست

(۳) (الف) نادرست، (ب) درست

(۴) (الف) نادرست، (ب) نادرست

پاسخ: گزینه (۲)


ترتیب اعمال بستار ترايایی و بازتابی هر طور که باشد، نتیجه یکسان است.

اما ترتیب اعمال بستار ترايایی و تقارنی هم است و در نتیجه فضای اثر گذار. برای مثال

فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $R = \{(a, b)\}$ باشد:

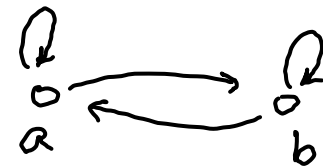
$$R: \begin{array}{ccc} \circ & \longrightarrow & \circ \\ a & & b \end{array}$$

(۱) اگر ابتدا سبب تکراری بگیریم، همان $R^* = \{(a, b)\}$ به دست می آید و حالا سبب متقارن می بگیریم:

$$R^* \cup R^{*-1} = \{(a, b), (b, a)\}$$


(۲) اگر ابتدا سبب متقارن بگیریم $R \cup R^{-1} = \{(a, b), (b, a)\}$ حالا در سبب متقارن جامع

$$(R \cup R^{-1})^* = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$$



۳۶- چند تا از عملگرهای دودویی زیر در جبر گزاره‌ها دارای خاصیت شرکت پذیری است؟

- \vee
 - \rightarrow
 - XOR
 - $(P \text{ nand } Q = \neg (P \wedge Q))$ nand
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ: گزینه (۲)
به این توضیحات از متن کتاب ریاضیات گسسته راهنمای ارسطو توجه کنید:

از کتاب ریاضیات گسسته راهبان ارشد:

شرکت پذیری عملگرها

عملگرهای AND, OR, NAND, NOR و XOR و ترکیب دوشروطی یعنی همان XNOR همگی دارای خاصیت جابه جایی هستند.

همچنین به جز عملگرهای NOR و NAND، سایر آنها دارای خاصیت شرکت پذیری هستند. شرکت پذیری به این معناست که در ترکیب ۳ گزاره، نحوه ی پرانتزگذاری تأثیری بر نتیجه ترکیب ندارد به عبارتی داریم:

$$\begin{array}{l}
 \oplus \text{ شرکت پذیری است} \\
 \uparrow \\
 \downarrow \text{ شرکت پذیری نیستند} \\
 \leftrightarrow \text{ شرکت پذیری است.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 p \oplus (q \oplus r) \equiv (p \oplus q) \oplus r \\
 p \uparrow (q \uparrow r) \not\equiv (p \uparrow q) \uparrow r \\
 p \downarrow (q \downarrow r) \not\equiv (p \downarrow q) \downarrow r \\
 p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r
 \end{array}
 \right.$$

به همین ترتیب عملگرهای \vee و \wedge هم این ویژگی هم ارزی را دارند. (\vee و \wedge شرکت پذیری دارند).
توجه: عملگر شرطی (\rightarrow) نه خاصیت جابه جایی دارد و نه خاصیت شرکت پذیری دارد. به عبارتی داریم:

$$(p \rightarrow q) \not\equiv (q \rightarrow p)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

خلاصه و جمع بندی:

در بین ویژگی‌های شناختی‌ها

$\oplus, \rightarrow, \downarrow, \uparrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

الف) هر جابه‌جایی هستند به جز \rightarrow

ب) هر شکست پذیرند به جز \rightarrow و \uparrow و \downarrow

بسم الله الرحمن الرحيم

پاسخ سوالات درس
ریاضیات گسسته

در آزمون ارشد ۹۹

مهندسی کامپیوتر

ابوالفضل گیلک

گروه بابان

@abolfazlgilak

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۱۳۹۹/۵/۳

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۹

مجموعه مهندسی کامپیوتر - کد (۱۲۷۷)

تعداد سؤال: ۱۵۰
مدت پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات (ریاضی عمومی (۲و۱)، معادلات دیفرانسیل، آمار و احتمال مهندسی، ریاضیات گسسته)	۲۰	۳۱	۵۰
۳	دروس تخصصی (نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها، مدار منطقی، معماری کامپیوتر، ساختمان داده و الگوریتم، سیستم عامل، شبکه‌های کامپیوتری، هوش مصنوعی، کامپایلر، پایگاه داده)	۱۰۰	۵۱	۱۵۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متغییرین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۹

۴۶- به چند طریق می‌توان پشت اعداد یک تا هفت علامت‌های مثبت یا منفی قرار داد، طوری که مجموع اعداد حاصل

منفی شود؟

۷ (۱)

۲۲ (۲)

۶۰ (۳)

۶۴ (۴)

پاسخ: $\overline{\overline{۳}}$ [کلمه اولی سازمان سنجش $\overline{\overline{۳}}$ (۳) بود که اصلاح شد.]

باتوجه به تعارن موجود در ماله، (هو حالت و تعددنی آن). تعدد حالات با مجموع مثبت و منفی برابر است.

تعداد کل حالات ممکن 2^7 است. در ۱ حالت، می توان مجموع صفر

را ایجاد کرد. پس در $2^7 - 1 = 127$ حالت مجموع مخالف هواست.

بنابراین در ۵۰٪ حالت، مجموع مثبت و در ۵۰٪ حالت مجموع منفی خواهد داشت.

دقت کنید که برای $+$ ، ۴ دنباله داریم که مجموع صفر را می دهد پس برای $-$ هم ۴ دنباله با مجموع صفر خواهد داشت.

۴۷- مقدار 2^{1026} به پیمانه ۱۷ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۷ (۴)

پاسخ: گزینه (۳)

می دانیم $2^{16} = 16$ پس $2^{17} = 16 - 1$ پس در هر 2^{16} بخش به پیمانه ۱۷ داریم:

$$2^{16} \equiv -1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲۵۶}} 2^{1024} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 2^2} 2^{1026} \equiv 4$$

۴۸- روی مجموعه $\{a, b, c\}$ چند رابطه می توان تعریف کرد که نه بازتابی باشد و نه پادمتقارن؟

(۱) ۲۵۹

(۲) ۱۲۸

(۳) ۳۲

(۴) ۷

پاسخ: \checkmark گزینه (۱)
با استفاده از فرمول و تئوری:

روابط بازتابی و پادمتقارن + روابط پادمتقارن - روابط بازتابی - همی روابط = جواب

$n=3$ است.

$$C_{3^3} = C_9 = 512$$

تعداد کل روابط:

$$C_{3^3-n} = C_6 = 64$$

تعداد روابط بازتابی:

$$C_3^n \times C_{\frac{3^3-n}{r}} = C_3^3 \times C_3 = 216$$

تعداد روابط یادستفاران:

$$C_{\frac{3^3-n}{r}} = C_3 = 27$$

تعداد روابط هم بازتابی هم یادستفاران:

حرد و نسج:

$$\text{جواب} = C_9 - C_6 - C_3 \times C_3 + C_3 = 259$$

۴۹- دنباله درجات یک گراف ساده، دنباله درجه رئوس گراف است که به صورت صعودی مرتب شده‌اند. کدام یک از دنباله‌های زیر نمی‌تواند دنباله درجات یک گراف ساده باشد؟

i - ۱، ۲، ۳، ۴، ۴، ۵، ۶، ۷

ii - ۲، ۲، ۳، ۳، ۶، ۶، ۶، ۶

iii - ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۶، ۶، ۷

iv - ۱، ۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۷، ۸

(۱) i و ii

(۲) ii و iv

(۳) iii و iv

(۴) فقط iv

هر چند بررسی برخی از دنباله‌ها با تجسم ساده است اما اگر نتوانیم

بالف: گزین (۲)

حاصل حکمی را نیز در اینجا اجزای کنیم:

بررسی (2)

7	6	5	4	4	3	2	1
	5	4	4	4	2	1	0
		4	2	2	1	0	0
			1	1	0	0	0

ترتیبی هست

بررسی (22)

6	6	6	6	3	3	2	2
	5	5	5	2	2	1	2
		5	5	2	2	2	1
			4	4	1	1	1
				3	0	0	0
					0	0	1

sort

تدریسی نیست:

بررسی (222)

7	6	6	4	4	3	2	2
	5	5	4	4	2	1	1
		4	2	2	1	0	1
			4	2	2	1	1
				1	1	0	0

sort

ترتیبی هست.

بررسی (27)

وقتی تعداد گره $n = 8$ است، درجه

بیشتر در گراف ساده نمی تواند بیشتر از $n-1 = 7$

باشد. (تدریسی نیست)

۵۰- تعداد راه‌های پرداختن ۶۳ ریال به کمک سکه‌های ۱ و ۲ و ۵ ریالی، بدون آن‌که ترتیب پرداخت سکه‌ها مهم باشد،

برابر با ضریب x^{63} در کدام عبارت است؟

$$(1) \quad (x + x^2 + x^5)^{63}$$

$$(2) \quad (1 + x + x^2 + x^5)^{63}$$

$$(3) \quad \left((1 + x)(1 + x^2)(1 + x^5) \right)^{63}$$

$$(4) \quad (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)$$

پایخ: گزینۀ (۴)

ساله را مدل سازی می‌کنیم: می‌خواهیم ۶۳ صیوه بخریم. ترتیب خرید صیوه مهم نیست اما:

سبب که راهی توان به هرتعداد برداشت، موزها در سبب کی دو تایی به فروش می‌رسند،

پرتقال که در سبب کی ۵ تایی به فروش می‌رسند.

$$1 + x + x^2 + x^4 + \dots$$

برای سبب ک

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

برای موزها

$$1 + x^5 + x^{10} + \dots$$

برای پرتقال

حالا ضرب آنها $f(x)$ است و ما به دنبال ضریب x^{63} در $f(x)$ هستیم.

یکی توضیح ساده تر:

اگر فقط سکه‌های یک ریایی و ۶۰ ریایی داشتیم، تعداد راه‌ها ص ∞ برای

دریافت ۶۳ ریال برابر با ۲ بود. $[(11)(63)]$ یا $(1)(3) + (60)(11)$

یعنی جواب برابر با ضریب x^{63} در $(1 + x^{60} + x^{120} + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)$ بود.

یک راه حل دیگر:

درگزینش‌های ۳، ۲ و ۱، فاکتوریل در محاسبه‌ی ضرایب نقش دارد. اما در مسأله‌ی

ما ترتیب نقشی ندارد. ما به از نوع ترکیب با تکرار است و در جواب عامل فاکتوریل

ظاهراً نمی‌شود.