

گروه بابان

انتشارات بابان و انتشارات راهیان ارشد

درس و کنکور ارشد

ریاضیات چهارگانه

(حل تشریحی سوالات دولتی ۱۳۹۷)

ویژه‌ی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر

ریاضی عمومی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل،

آمار و احتمال مهندسی و ریاضیات گسسته

ابوالفضل گیلک

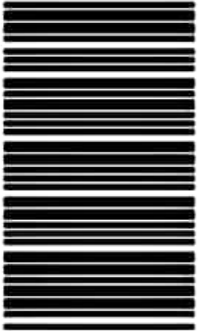
کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی این اثر در سازمان اسناد و کتابخانه‌ی ملی ایران به ثبت رسیده است.

@abolfazlgilak

کد کنترل

333

E



333E

صبح جمعه
۹۷/۲/۷



«گر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

مهندسی کامپیوتر - کد (۱۲۷۷)

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات (ریاضی عمومی (۲و۱)، معادلات دیفرانسیل، آمار و احتمال مهندسی، ریاضیات گسسته)	۲۰	۳۱	۵۰
۳	دروس تخصصی مشترک (ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها، نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها، مدارهای منطقی، معماری کامپیوتر، سیستم عامل و شبکه‌های کامپیوتری)	۳۰	۵۱	۸۰
۴	دروس تخصصی معماری سیستم‌های کامپیوتری (مدارهای الکتریکی، الکترونیک دیجیتال و VLSI، سیگنال‌ها و سیستم‌ها)	۲۰	۸۱	۱۰۰
۵	دروس تخصصی نرم‌افزار، شبکه‌های کامپیوتری، رایانش امن (کامپایلر، پایگاه داده‌ها، هوش مصنوعی)	۲۰	۱۰۱	۱۲۰
۶	دروس تخصصی هوش مصنوعی و ریاتیکز (مدارهای الکتریکی، هوش مصنوعی، سیگنال‌ها و سیستم‌ها)	۲۰	۱۲۱	۱۴۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حل چاپگر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برقراری آزمون، برای نطقی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با منظرین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۷

ریاضیات (ریاضی عمومی (۲۰۱)، معادلات دیفرانسیل، آمار و احتمال مهندسی، ریاضیات گسسته):

۳۱- در بین اعداد مختلط z که $\left| \frac{6z-i}{2+3iz} \right| \leq 1$ ، بیشترین مقدار اندازه z کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۳۲- ناحیه بین منحنی $x = e^y + \sin y$ و $x = \sin y$ برای $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم

جسم به دست آمده، کدام است؟

- (۱) $\pi(\pi-2)e^{\frac{\pi}{4}} + 2\pi$
- (۲) $\pi(\pi-1)e^{\frac{\pi}{4}} + 2\pi$
- (۳) $\pi(\pi-2)e^{\frac{\pi}{4}} + \pi$
- (۴) $\pi(\pi-1)e^{\frac{\pi}{4}} + \pi$

۳۳- همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های $\int_1^{+\infty} \cos t \, dt$ و $\int_1^{+\infty} \cos(t^2) \, dt$ به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

- (۱) همگرا - همگرا
- (۲) واگرا - واگرا
- (۳) همگرا - واگرا
- (۴) واگرا - همگرا

۳۴- بازه همگرایی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(Ln)}$ کدام است؟

(۱) $[1, 3]$

(۲) $[1, 2]$

(۳) $(1, 2)$

(۴) $(1, 3]$

۳۵- خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه‌های $z = 4 - 4x^2$ و $z = 4x^2 + 4y^2$ در نقطه $(0, 1, 4)$ موازی کدام بردار است؟

(۱) \hat{j}

(۲) \hat{i}

(۳) $\hat{i} - \hat{j}$

(۴) $\hat{i} + \hat{j}$

۳۶- مقدار انتگرال $\int_0^8 \int_{\sqrt{x}}^2 (e^{y^2} + y^2) dy dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{12}(2e^{16} + 125)$

(۲) $\frac{1}{12}(2e^{16} + 127)$

(۳) $\frac{1}{12}(2e^{16} + 127)$

(۴) $\frac{1}{12}(2e^{16} + 125)$

۳۷- فرض کنید که C منحنی جهت‌دار $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\oint_C \left(\frac{2e^x}{2(e^x + x^2)} - \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} \right) dx + \left(\frac{2x}{2(x^2 + y^2)} - \frac{2e^y}{2(e^y + y^2)} \right) dy$$

(۱) صفر

(۲) π

(۳) 2π

(۴) 3π

۳۸- فرض کنید S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد. مقدار انتگرال روی سطح زیر کدام است؟

$$\oiint_S ((2x + 3z)x - (xz + y)y + (y^2 + 2z)z) d\sigma$$

(۱) ۰

(۲) 3π

(۳) 4π

(۴) 12π

۳۹- کدام مورد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y(x^2 e^{xy} - y)dx + x(x^2 e^{xy} + y)dy = 0$ است؟

$$2e^{xy} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C \quad (1)$$

$$2e^{xy} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C \quad (2)$$

$$2e^{xy} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = C \quad (3)$$

$$2e^{xy} - \left(\frac{x}{y}\right)^2 = C \quad (4)$$

۴۰- جواب عمومی غیربدیهی معادله دیفرانسیل $yy'' + (1+y)(y')^2 = 0$ کدام است؟

$$e^y (y+1) = C_1 x + C_2 \quad (1)$$

$$e^y (y-1) = C_1 x + C_2 \quad (2)$$

$$e^{-y} (y-1) = C_1 x + C_2 \quad (3)$$

$$e^{-y} (y+1) = C_1 x + C_2 \quad (4)$$

۴۱- ضریب x^2 در جواب به سری معادله دیفرانسیل $y'' - y' \sin x + xy = 0$ با شرایط اولیه $y(0) = 0, y'(0) = 1$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

۴۲- تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\frac{s}{s^2 + 4s + 5}$ کدام است؟

$$e^{2t} (\cos t - 2 \sin t) \quad (1)$$

$$e^{2t} (\cos t + 2 \sin t) \quad (2)$$

$$e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t) \quad (3)$$

$$e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t) \quad (4)$$

۴۳- ضریب تغییرات (CV) سن ۲۰ نفر بعد از گذشت ۵ سال، چگونه است؟

(۱) ثابت می ماند.

(۲) افزایش می یابد.

(۳) کاهش می یابد.

(۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد.

۴۴- بر اساس یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(\mu, 9)$ ، خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. برای آزمون فرض $H_0: \mu = 1$ در مقابل $H_1: \mu = 3$ اگر ناحیه بحرانی به فرم $\bar{x} \geq k$ باشد، مقدار p -مقدار (p-value) آزمون کدام است؟
($n = 9$, $\bar{x} = 2$)

- (۱) ۰/۸۴۱۳
- (۲) ۰/۸۶۴۳
- (۳) ۰/۱۳۵۷
- (۴) ۰/۱۵۸۷

۴۵- جعبه ۱ شامل ۱ مهره سفید و ۱ مهره سبز، جعبه ۲ شامل ۱ مهره سفید و ۲ مهره سبز و جعبه ۳ شامل ۱ مهره سفید و ۳ مهره سبز است. جعبه ۱ ام با احتمال π_1 ، π_2 ، π_3 انتخاب و یک مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم. اگر مهره انتخابی سبز باشد، به ازای چه مقداری از (π_1, π_2, π_3) احتمال‌های پسین یکسان است؟

- (۱) $(\frac{6}{23}, \frac{9}{23}, \frac{8}{23})$
- (۲) $(\frac{12}{29}, \frac{9}{29}, \frac{8}{29})$
- (۳) $(\frac{12}{27}, \frac{8}{27}, \frac{7}{27})$
- (۴) $(\frac{11}{25}, \frac{8}{25}, \frac{6}{25})$

۴۶- در مدل رگرسیون خطی ساده $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ ، بر اساس یک نمونه تصادفی خلاصه اطلاعات به صورت زیر حاصل شده است. مقدار (مجموع مربعات خطا، انحراف معیار پیشگو) - $(S_{y,x}, SSE)$ ، کدام است؟

$$\bar{x} = 2, \bar{y} = 2, S_x = 4, S_y = 5, r = 0,6$$

- (۱) (۴, ۱۶)
- (۲) (۴, ۱۴)
- (۳) (۱۴, ۴)
- (۴) (۱۶, ۴)

۴۷- اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ را نوشته و اعضای آن‌ها را با هم جمع کنیم، عدد به دست آمده کدام است؟

- (۱) $\binom{n}{2} 2^{n-1}$
- (۲) $\binom{n+1}{2} 2^n$
- (۳) $\binom{n+1}{2} 2^{n-1}$
- (۴) $\binom{n}{2} \times 2 \times 2^{n-1}$

۴۸- مجموعه A از اعداد طبیعی «پوشا» است، اگر داشته باشیم:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}: ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (y > x)) \rightarrow (\forall z \in \mathbb{N}: ((z > x) \wedge (z < y)) \rightarrow (z \in A))$$

اگر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های پوشا از اعداد طبیعی را مجموعه B بنامیم، کدام مورد درست است؟

(۱) مجموعه B تهی است.

(۲) مجموعه B ناشمارا است.

(۳) مجموعه B منتهای و ناتهی است.

(۴) مجموعه B شمارا و نامنتهای است.

۴۹- فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن با درایه‌های ۰ و ۱ باشد که جمع اعداد هر ستون آن ۱ است. در این صورت a_n در کدام رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند؟

(۱) $a_n = a_{n-1} + (n-1) \times a_{n-2}$

(۲) $a_n = (n-1) \times a_{n-2}$

(۳) $a_n = n \times a_{n-2}$

(۴) $a_n = 2a_{n-1}$

۵۰- تابع مولد دنباله $\binom{n-1}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{1-x}$

(۲) $\frac{1}{1-x^n}$

(۳) $\frac{1}{(1-x)^2}$

(۴) $\frac{1}{(1-x)^n}$

دروس تخصصی مشترک (ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها، نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها، مدارهای منطقی، معماری کامپیوتر، سیستم عامل و شبکه‌های کامپیوتری):

۵۱- یک درخت دودویی جست‌وجو شامل n عدد و ارتفاع $O(\log n)$ در اختیار داریم. به ازای هر گره در درخت فوق تعداد نوادگان آن گره به عنوان اطلاعات اضافه، ذخیره شده است. کدام مورد را در زمان $O(\log n)$ نمی‌توان پاسخ داد؟

(۱) تعداد اعداد کوچک‌تر از عدد داده شده a

(۲) تعداد اعداد ذخیره شده در درخت که در بازه داده شده $[a, b]$ قرار دارند.

(۳) میانه اعداد ذخیره شده در درخت که در بازه داده شده $[a, b]$ قرار دارند.

(۴) میانگین اعداد ذخیره شده در درخت که در بازه داده شده $[a, b]$ قرار دارند.

۵۲- آرایه یک بعدی A شامل n عدد صفر و یک است. اگر به ازای هر صفر، اولین سمت چپ (با اندیس کمتر) و به ازای هر یک، اولین صفر سمت چپ آن را پیدا کنیم، هزینه سرشکن این محاسبه برای هر عدد، کدام است؟ (بهترین پاسخ را انتخاب کنید.)

(۱) $O(1)$

(۲) $O(n)$

(۳) $O(\log \log n)$

(۴) $O(\log n)$

$$z = x + iy \Rightarrow 4z - z = 4x + (4y - 1)z$$

$$2 + 3iz = (2 - 3y) + 3xz$$

$$|u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{می دانیم که:}$$

حالا داریم:

$$\left| \frac{4z - z}{2 + 3iz} \right| \leq 1 \Rightarrow |4z - z| \leq |2 + 3iz|$$

$$\Rightarrow |4z - z|^2 \leq |2 + 3iz|^2$$

$$\Rightarrow (4x)^2 + (4y - 1)^2 \leq (2 - 3y)^2 + (3x)^2$$

با نوشتن اتحادها و مرتب کردن جمله‌ها داریم:

$$27x^2 + 27y^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow |z|^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow |z| \leq \frac{1}{3}$$

@abolfazlgilak

معمولاً ما حجم حاصل از دوران حول محور x ها را به صورت:

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

و حجم حاصل از دوران حول محور y را به صورت

$$V = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

به دست می آوریم. در این مثال ضابطه $y = f(x)$ و $y = g(x)$

را نداریم. به جای باندهای x هم باندهای y را داریم است

نکته: هم x ها را به y و هم y ها را به x تبدیل کنیم تا حاصل ساده تر شود:

$$\begin{cases} y = e^x + \sin x & \rightarrow f(x) \\ y = \sin x & \rightarrow g(x) \\ x \in [0, \frac{\pi}{4}] & \rightarrow \text{باندها} \\ \text{محور دوران} & \rightarrow \text{دوران حول محور } y \text{ ها} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (e^x + \sin x - \sin x) dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x e^x dx \\ &= 2\pi (x-1)e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi(\pi-2)e^{\frac{\pi}{4}} + 2\pi \end{aligned}$$

$$A = \int_1^{\infty} \cos(t) dt \underset{\text{(مانند)}}{\approx} \sum_1^{\infty} (-1)^n \rightarrow \text{واریا} \quad \text{مردن (۴)}$$

$$B = \int_1^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_{1^2}^{\infty^2} \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$$

$$= \int_1^{\infty} \cos(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \underset{\text{مانند}}{\approx} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \rightarrow \text{هنگام}$$

* توجه: اگر همان، درجه یک باشد داریم:

$$\int_1^{\infty} \cos(at) dt \approx \sum_1^{\infty} (-1)^n$$

در مورد B با جایگزینی $t = \sqrt{x}$ کاری نداریم
همان درجه یک است.

abolfazlgilak

@abolfazlgilak

۲۴ گذرینه (۲)

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)} (x-2)^n$$

\downarrow

$$x_0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln n}} = 1 \xrightarrow{\text{وارونه}} R = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{بازه همگرایی} = (x_0 - R, x_0 + R) = (2-1, 2+1) = (1, 3)$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad \text{بازه همگرایی} \quad \left. \begin{array}{l} \text{بازه همگرایی} \\ \text{بازه همگرایی} \end{array} \right\} \text{بازه همگرایی}$$
$$\sum \frac{1}{n \ln n} \quad \text{بازه همگرایی} \quad \left. \begin{array}{l} \text{بازه همگرایی} \\ \text{بازه همگرایی} \end{array} \right\} \text{بازه همگرایی}$$

$$\text{جواب} = [1, 3)$$

* توجه: با توجه به گذرینه‌ها نیازی به محاسبه R نبود.
کافیست $x=1$ و $x=3$ را بررسی کنیم

@abolfazlgilak

@abolfazlgilak

$$g: z - \epsilon x^2 - \epsilon y^2 = 0$$

$$\vec{\nabla} g = (-2\epsilon x, -2\epsilon y, 1)$$

$$h: z - \epsilon + \epsilon x^2 = 0$$

$$\vec{\nabla} h = (2\epsilon x, 0, 1)$$

در نقطه $(0, 1, \epsilon)$ داریم:

$$\vec{\nabla} g = (0, -2\epsilon, 1)$$

$$\vec{\nabla} h = (0, 0, 1)$$

$$\vec{\nabla} g \times \vec{\nabla} h = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2\epsilon & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\epsilon \vec{j} + 0 + 0$$

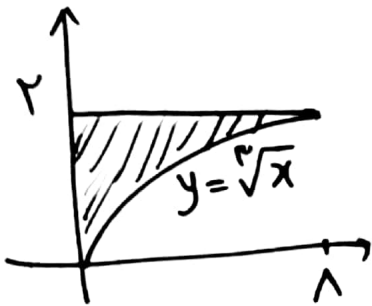
نرمال خارجی
گردانها

که موازی با \vec{x} است.

@abolfazlgilak

تغویض ترتیب لازم است

$$0 \leq x \leq 1$$
$$\sqrt{x} \leq y \leq 2$$



در ترتیب دیگر:

$$0 \leq y \leq 2$$
$$0 \leq x \leq y^2$$

$$I = \int_0^2 \int_0^{y^2} (e^{y^x} + y^x) dx dy$$

$$= \int_0^2 (y^2 e^{y^x} + y^5) dy = \frac{1}{6} e^{y^x} + \frac{1}{6} y^6 \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{12} (12e^{16} + 125)$$

@abolfazlgilak

۳۷ گزشتہ (۱) مرکز C دائرہ بہ مرکز (۲, -۲) و نصف 1 است دی

نقطہ کا (۰,۰) درون آن قرار ندارد دی :

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 0$$

میانہ پوتنٹیل معروف (در جزوہ)

حالا

$$\text{صورت سوال} = \oint_C \frac{2e^x}{2(e^x+x^2)} dx + \frac{-2e^y}{2(e^y+y^2)} dy + \frac{2}{2} \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2}$$

$$N_x - M_y = 0 \quad \text{طبق گزشتہ صفر است زیرا}$$

صفر است طبق
توضیحات بالا

$$\Rightarrow \quad \text{جواب} = 0$$

@abolfazlgilak

۳۸ گذشت (۳)
روی سطح کروی

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ داریم}$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{|z|}$$

سطح کم از دو نیمی $z \geq 0$ و $z \leq 0$ تشکیل شده است.
عباراتی که نسبت به x یا y فرد باشند، انتگرال آنها صفر است
فقط این عباراتی میمانند.

$$I = \iint_D (2x^2 - y^2 + 2z^2) \frac{1}{|z|} dy dx$$

البته بدان نیمی که بالاس داریم $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ما روی
این ناحیه انتگرال گرفته و ۲ برابر می کنیم. D یعنی تصویر شکل روی
صفحه xy برابر با دایره واحد است.

$$I = 2 \iint_D (2x^2 - y^2 + 2(1 - x^2 - y^2)) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy dx$$

$$= 2 \iint_D \frac{2 - 2y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy dx = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2 - 2r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - r^2}} r dr d\theta = 4\pi$$

(با تغییر متغیر $r = \sin t$ انتگرال را حل می کنیم)
 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$M = y(x^2 e^{xy} - y)$$

$$N = x(x^2 e^{xy} + y)$$

بامعادله‌ی $N'_x - M'_y$ آغاز می‌کنیم. متوجه می‌شویم که:

$$N'_x - M'_y = 2(x^2 e^{xy} + y)$$

بنابراین معادله کامل نیست اما اندر این تفاضل را به N تقسیم کنیم

تابع $f(x)$ به دست می‌آید یعنی y ها حذف می‌شوند:

$$f(x) = \frac{N'_x - M'_y}{-N} = \frac{2}{-x}$$

در عامل انتگرال ساز به دست می‌آید:

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$$

باضرب آن در معادله داریم:

$$(y e^{xy} - \frac{y^2}{x^2}) dx + (x e^{xy} + \frac{y}{x^2}) dy = 0$$

حالا با انتگرال گیری و البته در نظر گرفتن جواب‌های تکراری داریم:

$$e^{xy} + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{x^2} \right) + / + / = C$$

$$\Rightarrow 2e^{xy} + \left(\frac{y}{x} \right)^2 = 2C$$

بافرض $C = 2C$ گذرشی (۱) جواب است.

از تغییر متغیر $p = y'$ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $P(y) = y'$

بانه پس با مشتق‌گیری داریم: $y \cdot p' = y''$ یعنی:

$y'' = P \cdot p'$ [هنگام x در معادله حضور نداشته بانه از این تغییر متغیر بی‌اثر معلوم استفاده می‌شود].

$$y y'' + (1+y) (y')^2 = 0$$

$$\Rightarrow y p p' + (1+y) p^2 = 0 \Rightarrow p \left[y \frac{dp}{dy} + (1+y)p \right] = 0$$

اگر $p = 0$ بانه یعنی $y' = 0$ پس $y = c$ به دست می‌آید که به این جواب، جواب بی‌معنی معادله می‌گویند.

اگر $y \frac{dp}{dy} + (1+y)p = 0$ بانه با تفکیک متغیرها داریم:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1+y}{y} dy$$

با انتگرال‌گیری داریم: $\ln p = -(\ln y + y)$

$$\Rightarrow p = e^{-\ln y - y} = \frac{1}{y} e^{-y} \xrightarrow{p=y'} y' = \frac{1}{y} e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} e^{-y} \Rightarrow y e^y dy = dx$$

با انتگرال‌گیری داریم: $(y-1)e^y = x$

گذرینه (۲) درست است. ($C_1 = 1$ و $C_2 = 0$ را عاظ کنید).

دقت کنید اگر ضمن انتگرال‌گیری‌ها ثابت انتگرال را بنویسید، قدم دقیق جواب مشخص می‌شود.

ضریب x^m را a_m می نامیم. می دانیم که:

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$$

از معادله‌ی دیفرانسیل یک بار مشتق بگیریم تا y''' به دست آید پس

$x=0$ قرار دهیم:

$$y'' - y' \sin x + x y = 0$$

$$\Rightarrow y''' - y'' \sin x - y' \cos x + y + x y' = 0$$

$$x=0 \Rightarrow y'''(0) - 0 - y'(0) + y(0) + 0 = 0$$

مقادیر $y(0)$ و $y'(0)$ داده شده اند.

$$y'''(0) - 1 + 0 = 0 \rightarrow y'''(0) = 1$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

توجه: اگر در همان معادله‌ی دیفرانسیل $x=0$ قرار دهیم می‌توانیم

$y''(0)$ را هم محاسبه کنیم اما در اینجا لازم نبود.

در مخرج کسر، Δ منفی است. بنابراین می‌دانیم که قاعده‌ی انتقال مورد استفاده قرار گرفته است. با مربع کامل کردن مخرج داریم:

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)^2 + 1}$$

همین که در مخرج $(s+2)$ ایجاد شود، نشان می‌دهد که e^{-2t} در $f(t)$ ظاهر می‌شود پس گذرینه (۳) صحیح است.

پایخ تشریحی کامل:

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)^2 + 1} = \frac{(s+2) - 2}{(s+2)^2 + 1}$$

با در نظر گرفتن e^{-2t} به عنوان ضریب، می‌توانیم در ادامه به جای $F(s)$ روی $F(s-2)$ کار کنیم:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{(s+2) - 2}{(s+2)^2 + 1} \right] &= e^{-2t} L^{-1} \left[\frac{s-2}{s^2+1} \right] \\ &= e^{-2t} L^{-1} \left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \right] = e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t) \end{aligned}$$

در ابتدا سن افراد x_1, x_2, \dots, x_n است و داریم:

$$\bar{X} = \text{میانگین} \quad \sigma^2 = \text{واریانس}$$

$$c.v_1 = \frac{\sigma}{\bar{X}} \quad \text{ضریب تغییرات:}$$

با گذشت ۲۰ سال، به هر کسی سن‌ها ۲۰ واحد افزوده می‌شود.

پس x_i به $x_i + 20$ تبدیل می‌شود. میانگین جدید، ۲۰

واحد بیشتر از میانگین قبلی است اما واریانس و انحراف از

معیار تغییراتی نمی‌کنند:

$$c.v_2 = \frac{\sigma}{\bar{X} + 20}$$

بنابراین مقدار $c.v$ کاهش می‌یابد.

$$P\text{-value} = P \{ \bar{X} \geq K \mid H_0 \text{ درست باشد} \}$$

مقدار $p\text{-value}$ مانند خطای نوع اول به دست می آید. با این تفاوت که در این جا سرز ناخود بختی یعنی K باید ضمن یک نمونه گیری به ما داده شده باشد. در صورت سوال نتایج حاصل از یک بار نمونه گیری به ما داده شده است. نمونه ای به حجم $n=9$ با نتیجه $\bar{X}=2$. پس با فرض $K=2$ ادامه می دهیم.

$$P\text{-value} = P \{ \bar{X} \geq 2 \mid \mu=1 \}$$

شماره $\mu=1$ نشان می دهد که هوشیارم از نمونه ها از جامعه ای با توزیع نرمال $N(1, 9)$ می آید پس:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = Z \Rightarrow \frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{\frac{9}{9}}} = Z$$

$$\Rightarrow \bar{X} - 1 = Z$$

حالا داریم: (با در نظر گرفتن شماره $\mu=1$)

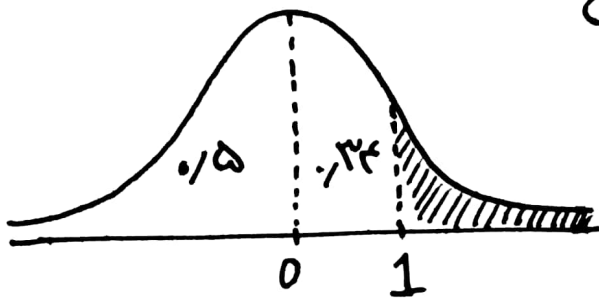
$$P(\bar{X} \geq 2) = P(\bar{X} - 1 \geq 2 - 1) = P(Z \geq 1)$$

$$\approx 1 - 0.242 - 0.15 = 0.608$$

توجه کنید که در نمودار توزیع

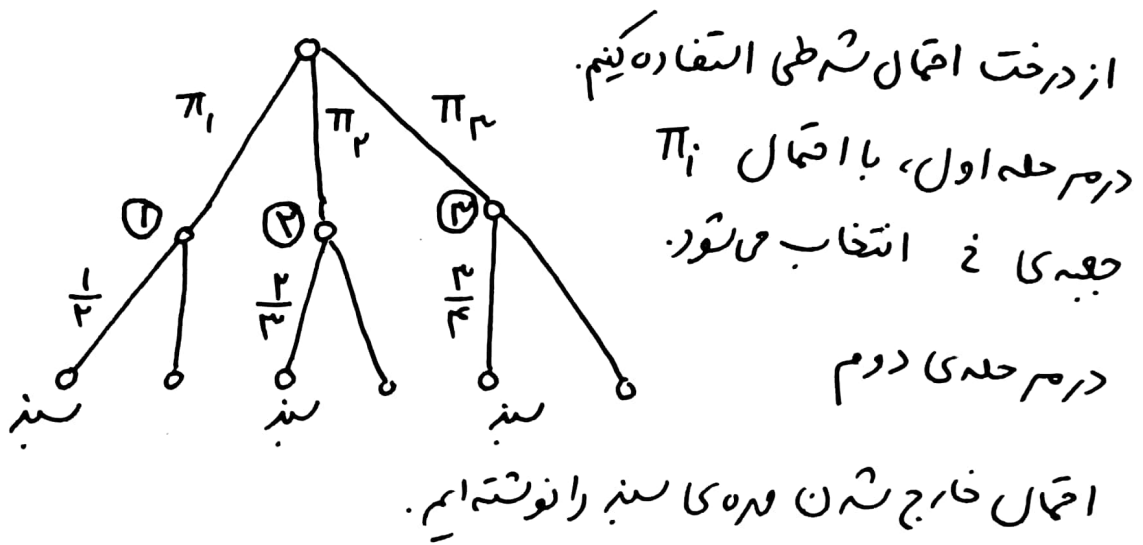
نرمال استاندارد (Z)

داریم:



$$P(Z \geq 1) \approx 1 - 0.5 - 0.24 \approx 0.26$$

@abolfazlgilak



احتمال خارج شدن مهره های سبز طبق این قاعده سه دست می آید:

$$\pi_1 \left(\frac{1}{4}\right) + \pi_2 \left(\frac{2}{3}\right) + \pi_3 \left(\frac{3}{4}\right)$$

اما اگر این سه طرادانته باشیم که مهره های خارج شده سبز است

آنچه احتمال آن که از جعبه اول خارج شده باشد این است:

$$P_1 = \frac{\frac{1}{4} \pi_1}{\frac{1}{4} \pi_1 + \frac{2}{3} \pi_2 + \frac{3}{4} \pi_3}$$

به همین ترتیب احتمال آن که از جعبه دوم خارج شده باشد:

$$P_2 = \frac{\frac{2}{3} \pi_2}{\frac{1}{4} \pi_1 + \frac{2}{3} \pi_2 + \frac{3}{4} \pi_3}$$

$$P_3 = \frac{\frac{3}{4} \pi_3}{\frac{1}{4} \pi_1 + \frac{2}{3} \pi_2 + \frac{3}{4} \pi_3}$$

و احتمال خارج شدن از جعبه سوم:

ما می خواهیم این احتمال ها (احتمال های پسین) با هم برابر باشند.
 مخدج ها بیان است پس باید دانسته باشیم:

$$\frac{1}{2} \pi_1 = \frac{2}{3} \pi_2 = \frac{3}{4} \pi_3$$

اگر همه را در ۱۲ ضرب کنیم داریم:

$$6\pi_1 = 8\pi_2 = 9\pi_3$$

پس نتیجه (۲) صحیح است.

@abolfazlgilak

توضیح: احتمال پسین یعنی احتمال شرطی مربوط به مرحله اول،
 با دانستن نتیجه‌ی مرحله دوم از درخت احتمال شرطی.

توضیح:

اگر نخواهیم به صورت شرطی پاسخ را ادامه دهیم،

درت وی $6\pi_1 = 8\pi_2 = 9\pi_3$ فرض می‌کنیم

$$\pi_1 = x \quad \pi_2 = \frac{4}{8}x \quad \pi_3 = \frac{4}{9}x$$

حالا از آنجا که $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ است داریم:

$$x + \frac{4}{8}x + \frac{4}{9}x = 1 \Rightarrow x = \frac{12}{29}$$

حالا π_2 و π_3 هم معلوم می‌شوند.

@abolfazlgilak

یاد آوری میں کیجئے کہ:

$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$S_x^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad , \quad S_x = \sqrt{S_x^2}$$

$$S_y^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad , \quad S_y = \sqrt{S_y^2}$$

ضریب همبستگی برابر است با: $r = \frac{4}{10}$ دس:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{S_{xy}}{4 \times 5}$$

$$\Rightarrow S_{xy} = 12$$

مجموع ۳ بیان خطا برابر است با:

$$SSE = \frac{S_x^2 S_y^2 - S_{xy}^2}{S_x^2}$$

$$\Rightarrow SSE = \frac{4^2 \times 5^2 - 12^2}{4^2} = 5^2 - 3^2 = 16$$

و نیازی به محاسبه $S_{y,x}$ نداریم.

توجہ: در اغلب منابع به جای علامت S_x^2 از علامت S_{xx} استفاده می‌شود. اما طرح سوال غلطی ندارد معمولاً رعایت نکرده است.

روٹس اول:

ابتدائیں عدد $\{1, 2, \dots, n\}$ $K \in$ درجہ تعدادی از زیر مجموعہ های

این مجموعہ، ظاهر می شود. فرض کنیم $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ و

$K \in A$ باشد پس K راضی باشد در A قرار دهم اما در مورد

سایر عناصر، هر کدام می توانند عضو A باشند یا نباشند، پس

2^{n-1} حالت برای A داریم.

نتیجه: هر کدام از اعداد $K=1, 2, \dots, n$ در 2^{n-1} زیر مجموعہ،

ظاهر می شوند. پس مجموع مورد نظر ما برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^n K \times 2^{n-1} &= 2^{n-1} \times \sum_{K=1}^n K \\ &= 2^{n-1} (1+2+\dots+n) = 2^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2^{n-1} \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

روٹس دوم:

به ازای $n=1$ مجموعہ $\{1\}$ دارای دو زیر مجموعہ می

$\{1\}$ و \emptyset است. مجموعہ اعضای آنها 1 می شود.

تجزیه ای که به ازای $n=1$ مقدارش 1 است گزینہ (۳)

است. توجه کنید که: $\binom{1}{2} = 0$ است.

طبق این تعریف، مجموعه‌های پوش آلفای هستند که اند \mathbb{N} و از \mathbb{N} راداشته باشند، هم اعداد بین آنها را هم داشته باشند.

این مجموعه‌ها عبارتند از:

(۱) مجموعه‌ی تهی \emptyset

(۲) مجموعه‌های n از \min تا \max رادارند:

$$A_{[m, M]} = \{m, m+1, m+2, \dots, M\}$$

(۳) مجموعه‌های n از \min تا ∞ ادامه دارند:

$$A_{[m, \infty)} = \{m, m+1, m+2, \dots\}$$

رشته‌ی دوم حداکثر به اندازه‌ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ هستند با این

تابع یک به یک: $f(A_{[m, M]}) = (m, M)$

رشته‌ی شماره‌ای نامتناهی هستند.

رشته‌ی سوم به اندازه‌ی \mathbb{N} هستند. با این تابع:

$$f(A_{[m, \infty)}) = m$$

رشته‌ی شماره‌ای نامتناهی هستند.

نتیجه:

مجموعه‌های زیر مجموعه‌های پوشای \mathbb{N}
یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی است زیرا از
اجتماع چند مجموعه‌ی شمارا ساخته می‌شود و در ضمن
نامتناهی هم هست

برای درک بهتر توابع فوق به چند مثال توجه کنید:

$$A = \{3, 5, 7, 8\} \Rightarrow f(A) = (3, 8) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

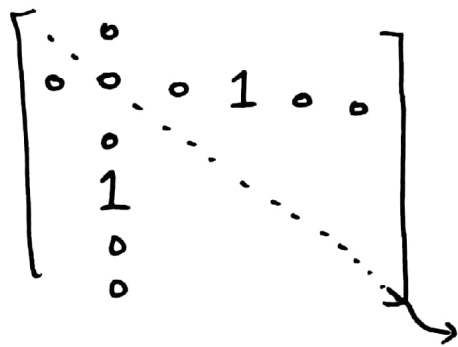
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow f(A) = (1, 7) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow f(A) = 1 \in \mathbb{N}$$

$$A = \{10, 11, 12, 13, \dots\} \Rightarrow f(A) = 10 \in \mathbb{N}$$

@abolfazlgilak

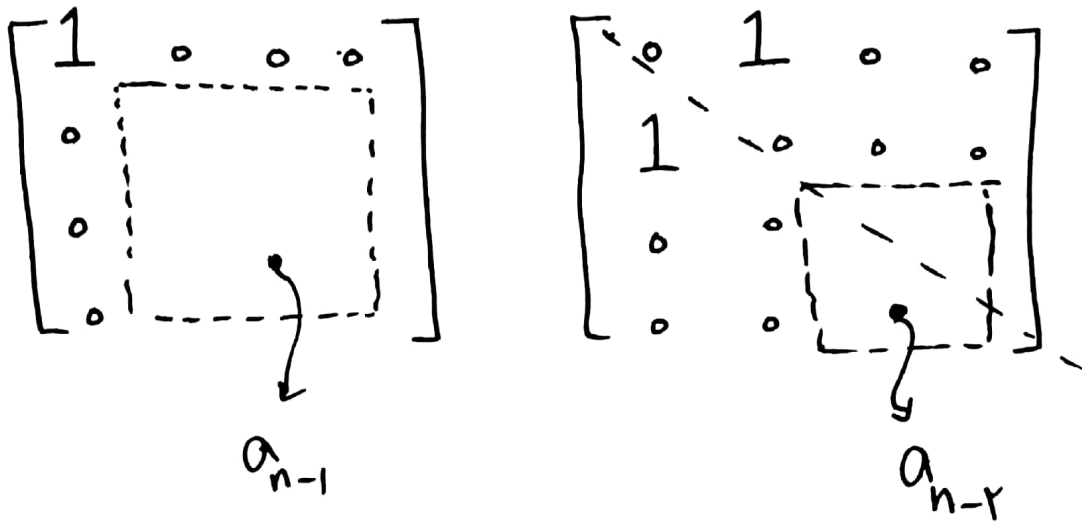
ابتدا توجه کنید که شرط متقارن بودن ماتریس را داریم یعنی درایه‌ها نسبت به قطر اصلی تقارن دارند. پس همان طور که در هر ستون فقط یک درایه 1 می‌تواند حضور داشته باشد، در هر سطر هم فقط یک درایه 1 می‌تواند حضور داشته باشد.



(قطر اصلی)

فرض کنیم a_n تعداد ماتریس‌های $n \times n$ با این شرط باشد. در سطر اول آن به محل 1 توجه کنید. اگر آن را در ستون اول قرار دهیم، سطر و ستون اول ماتریس، در سطر درایه 1 باید صفر باشند و حالا یک ماتریس $n-1$ در $n-1$ می‌ماند که تعداد حالات آن a_{n-1} است.

اما اگر رقم 1 سطر اول را در ستون‌های دوم، یا سوم یا ... یا n ام قرار دهیم با توجه به تقارن، تکلیف 2 سطر و 2 ستون مشخص می‌شود. حالا ادانه‌ی سؤال در مورد ماتریسی با ابعاد $n-2$ در $n-2$ است و تعداد حالات a_{n-2} است.



نیاید این با توجه به محل قرارگرفتن 1 در سطرها اول داریم:

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} + \dots + a_{n-2} \\
 &= a_{n-1} + (n-1) a_{n-2}
 \end{aligned}$$

اوشی کوتاہ اول :

$$a_1 = \binom{n}{1} = n \Rightarrow f'(0) = n$$

تیز گزینہ ای کہ $f'(0) = n$ است گزینہ (۴) است.

@abolfazlgilak

اوشی کوتاہ دوم :

$$a_k = \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k! (n-1)!}$$

بابہ کردن جملات می بیند که a_k نسبت به متغیر k یک چندجمله‌ای

بدرجہ $n-1$ است یعنی k^{n-1} بزرگترین توان k است. پس

مخرج کسر $f(x)$ باید به قدر $(1-x)^n$ باشد. گزینہ (۴) چنین

است.

از سری هندسی آغاز می‌کنیم و با مشتق‌گیری به جواب

اوشی تشریحی :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad \text{می‌بینیم:}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m \quad \text{مشتق‌گیری از طرفین:}$$

$$\frac{2!}{(1-x)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) x^{m-2} \quad \text{مشتق گیری دوباره:}$$

پس از $n-1$ بار مشتق گیری داریم:

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n) x^{m-(n-1)}$$

با استفاده از خاصیت انتقال سری‌ها داریم:

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{m=n-1}^{\infty} (m+(n-1))(m+(n-1)-1)\dots(m+n-1-n) x^m$$

با تقسیم طرفین بر $(n-1)!$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{m=n-1}^{\infty} \underbrace{\binom{m+n-1}{m}}_{a_m} x^m$$