موسسه بابان

انتشارات بابان و انتشارات راهیان ارشد

درس و کنکور ارشد

ریاضیات گسسته

(حل تشریحی سوالات دولتی ۱۳۹۷)

ویژه‌ی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر و IT

براساس کتب مرجع

رالف. پ. گریمالدی و کنت. اچ. روزن

ابوالفضل گیلک

سؤالات سال ۹۷

۱- کدام گزینه درست است؟ (متغیرها مقید به اعداد حقیقی‌اند.) (علوم کامپیوتر - ۹۷)

۱) $\exists x \forall z \forall y (x+z<y)$
۲) $\exists x \exists y \forall z (x+z<y)$
۳) $\exists x \forall z \exists y (x+z<y)$
۴) $\exists x \exists z \forall y (x+z<y)$

۲- فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن با درایه‌های 0 و 1 باشد که جمع اعداد هر ستون آن 1 است. در این صورت a_n در کدام رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر - ۹۷)

۱) $a_n = a_{n-1} + (n-1) \times a_{n-2}$
۲) $a_n = (n-1) \times a_{n-2}$
۳) $a_n = n \times a_{n-2}$
۴) $a_n = 2a_{n-1}$

۳- جواب رابطه‌ی بازگشتی $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \log n$، کدام است؟ (IT - ۹۷)

۱) $O(\sqrt{n})$
۲) $O(\log n)$
۳) $O(\log^2 n)$
۴) $O(\sqrt{n} \log n)$

۴- مجموع اعداد 6 رقمی که با رقم‌های $1,1,1,4,4,4$ ساخته می‌شوند، کدام است؟ (علوم کامپیوتر - ۹۷)

۱) 5555550
۲) 6666660
۳) 11111100
۴) 360×555555

۵- با استفاده از حروف کلمه‌ی falafel چند کلمه به طول 5 می‌توان ساخت؟ (علوم کامپیوتر - ۹۷)

۱) 270
۲) 360
۳) 480
۴) 720

۶- چهار عدد متمایز از دنباله $-4,-3,-2,-1,1,2,3,4$ را انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حاصل ضرب اعداد انتخاب شده مثبت باشد، چقدر است؟ (علوم کامپیوتر - ۹۷)

۱) $\frac{4}{35}$
۲) $\frac{8}{35}$
۳) $\frac{18}{35}$
۴) $\frac{19}{35}$

۷- ضریب جمله‌ی x^4 در عبارت زیر کدام است؟ (علوم کامپیوتر - ۹۷)

$$(x+\sqrt{2}+1)^8 + (x+\sqrt{2}-1)^8 + (x-\sqrt{2}+1)^8 + (x-\sqrt{2}-1)^8$$

۱) 1920
۲) 2018
۳) 3240
۴) 4760

۸- تعداد سه تایی‌های مرتب (x,y,z) از اعداد صحیح که در نامساوی $|x|+|y|+|z| \le 6$ صدق می‌کنند، کدام است؟ (علوم کامپیوتر - ۹۷)

۱) 672
۲) 482
۳) 377
۴) 280

۹- تعداد 7 نهال چنار، 4 نهال سپیدار و 3 نهال سرو باید در یک ردیف با رعایت شرایط زیر کاشته شوند: (علوم کامپیوتر – ۹۷)

نهال‌های ابتدا و انتهای ردیف چنار باشند.

هیچ دو نهال سرو مجاور هم نباشند.

هیچ دو نهال سپیدار مجاور هم نباشند.

هر نهال سرو بین یک چنار و یک سپیدار واقع شود.

انجام این کار به چند طریق ممکن است؟ (نهال‌های هم نوع، یکسان محسوب می‌شوند.)

۱) 840 ۲) 620 ۳) 1020 ۴) 1140

۱۰- تابع مولد دنباله‌ی $\binom{n-1}{0},\binom{n}{1},\binom{n+1}{2},...$، کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر – ۹۷)

۱) $\frac{1}{1-x}$ ۲) $\frac{1}{1-x^n}$ ۳) $\frac{1}{(1-x)^2}$ ۴) $\frac{1}{(1-x)^n}$

۱۱- تابع مولد دنباله‌ی $1,2,3,4,...$، کدام است؟ (IT – ۹۷)

۱) $\frac{1}{1-x}$ ۲) $\frac{1}{1-x^2}$ ۳) $\frac{1}{(1-x)^2}$ ۴) $\frac{1}{(1-x)^n}$

۱۲- فرض کنید **P** گردایه همه افرازهای مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. رابطه‌ی R را روی **P** به این صورت تعریف می‌کنیم: برای هر دو عضو P_1 و P_2 از **P** گوییم P_1 با P_2 در رابطه است (P_1RP_2) اگر و تنها اگر هر عضو از افراز P_1 زیرمجموعه‌ی عضوی از افراز P_2 باشد. کدام گزینه درست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $R=\phi$ ۲) R رابطه‌ی همانی روی P است.

۳) R یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است. ۴) R یک رابطه‌ی هم ارزی روی P است.

۱۳- بستار متعدّی رابطه‌ی $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,b)\}$ دارای چند عضو است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 9 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 14

۱۴- به چند طریق می‌توان مجموعه $\{1,2,3,...,1397\}$ را به 4 زیرمجموعه‌ی ناتهی افراز کرد که در هیچ یک، دو عدد متوالی وجود نداشته باشد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $2^{1395}-1$ ۲) $3^{1395}-2^{1394}$

۳) $3^{1396}+2^{1395}-1$ ۴) $\frac{1}{2}(3^{1395}-2^{1396}+1)$

۱۵- با توجه به دو گزاره‌ی داده شده، کدام مورد درست است؟ (۹۷ – IT)

a) اگر از رابطه‌ی دلخواه روی یک مجموعه‌ی متناهی، به ترتیب بستارهای ترایایی، بازتابی و تقارنی بگیریم، به یک رابطه‌ی هم ارزی می‌رسیم.

b) کوچک‌ترین رابطه روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5\}$ که بازتابی و متقارن باشد، ولی ترایایی نباشد 10 عضو دارد.

۱) (a) درست، (b) درست
۲) (a) نادرست، (b) درست
۳) (a) درست، (b) نادرست
۴) (a) نادرست، (b) نادرست

۱۶- کدام شرط برای یکتا بودن ترتیب توپولوژیکی در یک گراف جهت‌دار بدون دور، لازم و کافی است؟ (۹۷ – IT)

۱) گراف قویاً هم‌بند باشد.
۲) بین هر دو رأس یک یال باشد.
۳) ترتیب توپولوژیکی همیشه یکتا است.
۴) به ازای هر دو رأس u و v، از u به v یا از v به u مسیر باشد.

۱۷- اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{1,2,3,..,n\}$ را نوشته و اعضای آن‌ها را با هم جمع کنیم، عدد به دست آمده کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر – ۹۷)

۱) $\binom{n}{2}2^{n-1}$
۲) $\binom{n+1}{2}2^{n}$
۳) $\binom{n+1}{2}2^{n-1}$
۴) $\binom{n}{2}\times 2\times 3^{n-1}$

۱۸- مجموعه‌ی A از اعداد طبیعی «پوشا» است، اگر داشته باشیم:

$$\forall x,y\in\mathbb{N}:((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(y>x))\rightarrow(\forall z\in\mathbb{N}:((z>x)\wedge(z<y))\rightarrow(z\in A))$$

اگر مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های پوشا از اعداد طبیعی را مجموعه‌ی B بنامیم، کدام مورد درست است؟ (مهندسی کامپیوتر – ۹۷)

۱) مجموعه‌ی B تهی است.
۲) مجموعه‌ی B ناشمارا است.
۳) مجموعه‌ی B متناهی و ناتهی است.
۴) مجموعه‌ی B شمارا و نامتناهی است.

۱۹- فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی چهارضلعی‌هایی در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ باشد، که مختصات رئوس آنها اعداد گویا هستند و B مجموعه‌ی همه‌ی مربع‌هایی در صفحه $\mathbb{R}^2$ باشد که طول ضلع هر یک عددی گویا است. کدام گزینه درست است؟ (در گزینه‌های زیر χ_0 عدد اصلی مجموعه‌ی اعداد طبیعی و c عدد اصلی $\mathbb{R}$ است.) (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) اعداد اصلی A و B هر دو χ_0 است.

۲) عدد اصلی A مساوی c و عدد اصلی B مساوی χ_0 است.
۳) اعداد اصلی A و B هر دو c است.
۴) عدد اصلی A مساوی χ_0 و عدد اصلی B مساوی c است.

۲۰- فرض کنید $A = \{1,2,...,15\}$، چندتا از زیرمجموعه‌های A شامل دقیقاً سه عدد فرد هستند؟
(علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $\binom{8}{3}2^7$ ۲) $\binom{8}{3}$ ۳) $2^{15}-2^6$ ۴) 2^7

۲۱- می‌خواهیم پنج زیرمجموعه E,D,C,B,A از مجموعه‌ی $X = \{1,2,3\}$ انتخاب کنیم به طوری که $A \cup B \cup C = D \cap E$. به چند طریق می‌توان اعضای این زیرمجموعه‌ها را انتخاب کرد؟ (پنج زیرمجموعه لزوماً متمایز نیستند.)
(علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 1024 ۲) 1000 ۳) 729 ۴) 512

۲۲- اعداد مجموعه $\{1,2,...,n\}$ را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم به طوری که تفاضل هر دو عدد سیاه، سفید است و تفاضل هر دو عدد سفید، سیاه است. حداکثر n چقدر است؟
(علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 3 ۲) 4
۳) 5 ۴) n هر عددی می‌تواند باشد.

۲۳- گراف K_{100} شامل چند زیرگراف یکریخت با ستاره $K_{1,4}$ است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $\binom{100}{5}$ ۲) $96\binom{100}{5}$ ۳) $96\binom{100}{4}$ ۴) $100\binom{100}{4}$

۲۴- همه عبارات زیر درباره گراف G صحیح است، بجز: (علوم کامپیوتر – ۹۷)
۱) اگر G گراف دوبخشی باشد، آنگاه مکمل آن دوبخشی نیست.
۲) هر گراف دوبخشی با n رأس حداکثر $\frac{n^2}{4}$ یال دارد.
۳) گراف دوبخشی منتظم با تعداد فرد رأس وجود ندارد.
۴) اگر G یک گراف دوبخشی باشد، با حذف هر یال، دوبخشی باقی می‌ماند.

۲۵- درخت T که دارای 3 رأس درجه‌ی 5 است، حداقل دارای چند برگ است؟
(علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 2 ۲) 10 ۳) 11 ۴) 15

۲۶- طبق تعریف زیر، گراف G چند یال دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

هر زیرمجموعه 3 عضوی از مجموعه $x=\{1,2,...,10\}$ را یک رأس G در نظر بگیرید. دو رأس A و B مجاورند اگر و تنها اگر اشتراک A و B تک عضوی باشد $(|A\cap B|=1)$.

۱) 120 ۲) 620 ۳) 1260 ۴) 3780

۲۷- گراف G از مرتبه 15 با مینیمم درجه $\delta=3$، دارای 3 مؤلفه همبندی است. تعداد حداقل و حداکثر یال‌ها را با q_{min} و q_{max} نمایش می‌دهیم. در این صورت (q_{min},q_{max}) کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $(12,30)$ ۲) $(12,33)$ ۳) $(14,25)$ ۴) $(14,36)$

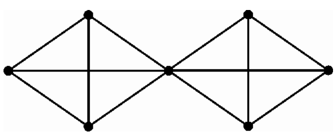
۲۸- گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{2,3,4,...,20\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود که دو رأس i و j مجاور هستند اگر و تنها اگر i و j نسبت به هم اول باشند. کدام مورد درباره G درست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) مسیر هامیلتونی دارد اما اویلری نیست.
۲) گراف اویلری است اما مسیر هامیلتونی ندارد.
۳) نه مسیر هامیلتونی دارد و نه گراف اویلری است.
۴) هم مسیر هامیلتونی دارد و هم گراف اویلری است.

۲۹- چند گراف کامل دوبخشی وجود دارد که قابل تجزیه به 3 درخت فراگیر باشد؟ (در تجزیه یک گراف به چند زیرگراف، هر یال گراف دقیقاً در یک زیرگراف ظاهر می‌شود.) (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۰- تعداد درخت‌های پوشای گراف زیر چندتاست؟ (۹۷ – IT)



۱) 2^4
۲) 2^6
۳) 2^8
۴) 2^{10}

۳۱- با توجه به دو گزاره‌ی داده شده، کدام مورد درست است؟ (۹۷ – IT)

a) در هر درخت n رأسی اندازه بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل حداقل $\frac{n}{2}$ است.

b) اگر T یک گشت ماکزیمال در گراف G باشد که دو رأس ابتدایی و انتهایی آن متفاوت است، آن‌گاه درجه‌ی دو رأس ابتدایی و انتهایی T در G فرد است.

۱) (a) درست، (b) درست
۲) (a) نادرست، (b) درست
۳) (a) درست، (b) نادرست
۴) (a) نادرست، (b) نادرست

۳۲- مجموعه‌ی S با $1 \in S$ و ضابطه‌ی استقرایی $x \in S \Rightarrow (x+3 \in S, (x-2)^2+2 \in S)$ تعریف شده است. مقدار $|S \cap \{1,2,...,20\}|$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 10
۲) 11
۳) 13
۴) 14

۳۳- a و b دو رقم متمایز هستند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، مضربی طبیعی از n با ارقام a و b وجود دارد. a و b به ترتیب کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 2,1
۲) 5,1
۳) 5,3
۴) 7,0

۳۴- فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی $n+1$ عضوی از مجموعه‌ی $\{1,...,2n\}$ باشد. کدام مورد نادرست است؟ (در زیر علامت |، علامت بخش‌پذیری و gcd عملگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک است.) (۹۷ – IT)

۱) $\exists\, a,b \in S : a \mid b$
۲) $\exists\, a \in S : 3 \mid a$
۳) $\exists\, a \in S : 2 \mid a$
۴) $\exists\, a,b \in S : \gcd(a,b)=1$

پاسخ سؤالات سال ۹۷

۱- گزینه (۳) صحیح است.

گزینه (۱) نادرست است زیرا اگر $x < y - z$ باشد و y و z بتوانند هر مقدار حقیقی را اختیار کنند آنگاه با انتخاب $y = 0$ داریم $x < -z$ یعنی x باید از هر عددی کوچک‌تر باشد که می‌دانیم چنین عددی وجود ندارد.

در گزینه (۲) اشکال مشابهی رخ می‌دهد:

$$x + z < y \Rightarrow x - y < -z$$

z دارای سور کلی است پس $x - y$ باید از هر عددی کوچک‌تر باشد و می‌دانیم که چنین عددی وجود ندارد.

در گزینه (۴) هم ایراد مشابهی وجود دارد.

اما گزینه (۳) صحیح است. این گزینه تنها گزینه‌ای است که آخرین سور آن وجودی است. وقتی می‌گوییم $\forall z \exists y$ یعنی y می‌تواند به z بستگی داشته باشد. با انتخاب $x = 0$ و $y = z + 1$ می‌بینیم که گزینه (۳) صحیح است.

۲- گزینه (۱) صحیح است.

ماتریس متقارن یعنی ماتریسی که نسبت به قطر اصلی متقارن است ($a_{ij} = a_{ji}$) پس شرطی که روی ستون‌ها داده است به سطرها هم منتقل می‌شود. در نتیجه ماتریس موردنظر باید در هر سطر و ستون دقیقاً یک درایه‌ی 1 داشته باشد و نسبت به قطر هم متقارن باشد.

اگر در ماتریس $n \times n$، درایه 1 سطر اول را در ستون اول قرار دهیم بقیه مسئله a_{n-1} حالت دارد.

اما اگر 1 را در سایر ستون‌ها قرار دهیم با توجه به تقارن، محل یک 1 دیگر هم مشخص می‌شود و با حذف 2 سطر و 2 ستون، a_{n-2} حالت داریم:

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

۳- گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از قضیه‌ی master بین $f(n) = \log n$ و $n^{\log_4^2} = n^{\frac{1}{2}}$ به وضوح $n^{\frac{1}{2}}$ سرعت رشد بیشتری دارد و از خانواده‌ی چندجمله‌ای‌هاست، پس:

$$T(n) = O(\sqrt{n})$$

۴- گزینه (۱) صحیح است.

تعداد کل جایگشت‌های $1,1,1,4,4,4$ برابر با $\frac{6!}{3!3!} = 20$ است. در هر کدام از جایگاه‌ها به تعداد مساوی ارقام 4 و 1 ظاهر می‌شوند. بنابراین:

مجموع ارقام یکان $= 10(4) + 10(1) = 50$

مجموع ارقام دهگان $= 10(4) + 10(1) = 50$

به همین ترتیب در هر جایگاه، مجموع ارقام 50 است.

$$\text{جواب} = 10^5(50) + 10^4(50) + \ldots + 10(50) + (50)$$
$$= 50(10^5 + 10^4 + \ldots + 1)$$
$$= 50(111111) = 555550$$

توجه: دقت کنید که عدد 6 رقمی $\overline{abcdef}$ را می‌توان به صورت $10^5 a + 10^4 b + \ldots + f$ نوشت.

۵- گزینه (۲) صحیح است.

این حروف را داریم: ff, aa, ll, e

پس تابع مولد برای این مسئله $P(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!})^3(1+x)$ است. ضریب x^5 در این بسط برابر با 3 است پس جواب برابر است با:

$3 \times 5! = 360$

۶- گزینه (۴) صحیح است.

تعداد کل حالات $\binom{8}{4}$ است. احتمال آن را می‌خواهیم که تعداد اعداد منفی انتخاب شده، زوج باشد:

$$P = \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{4} + \binom{4}{2}\binom{4}{2} + \binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{19}{35}$$

۷- گزینه (۴) صحیح است.

این 4 عبارت به فرم $(x + (\pm\sqrt{2} \pm 1))^8$ هستند. ضریب x^4 در آنها برابر است با ضریب جمله‌ی:

$$\binom{8}{4}(x)^4(\pm\sqrt{2} \pm 1)^4$$

با جمع کردن ضرایب x^4 داریم:

$$a_4 = \binom{8}{4}(2(\sqrt{2} - 1)^4 + 2(\sqrt{2} + 1)^4)$$
$$= 4760$$

@abolfazlgilak

۸- گزینه (۳) صحیح است.

اگر $|x|=0$ باشد، برای x فقط یک جواب داریم: $x=0$

اما اگر $|x|>0$ باشد، برای x دو حالت داریم.

تعداد جواب‌ها در حالتی که همه‌ی مؤلفه‌ها غیرصفر باشند:

$$2\times2\times2\times\binom{3+3}{3}=160$$

تعداد جواب‌هایی که دقیقاً یک مؤلفه‌ی صفر دارند:

$$\binom{3}{1}\times2\times2\times\binom{4+2}{2}=180$$

(دقت کنید که مثلاً اگر $|y|=0$ باشد باید $|x|+|z|\le 6$ را حل کنیم با شرط غیرصفر بودن x و z)

تعداد جواب‌های دارای دقیقاً 2 مؤلفه‌ی صفر:

$$\binom{3}{2}\times2\times\binom{5+1}{1}=36$$

تعداد جواب‌های دارای 3 مؤلفه‌ی صفر هم 1 است.

جواب $=160+180+36+1=377$

۹- گزینه (۱) صحیح است.

چنارها را با 7 حرف a و سپیدارها را با 4 حرف b و سروها را با 3 حرف c نمایش می‌دهیم.

مرحله اول: همه‌ی چنارها را در یک ردیف قرار دهید:

a a a a a a a

این کار فقط یک حالت ممکن دارد.

مرحله دوم: لابه‌لای حروف a، 6 محل فرضی وجود دارد. از آنها 4 محل را انتخاب کنیم تا حروف b را قرار دهیم:

$$\binom{6}{4}=15$$

a b a b a a b a a b a

مرحله سوم: 3 حرف c را در جاهایی قرار می‌دهیم که بین a و b قرار بگیرند. 8 محل مناسب وجود دارد:

$$\binom{8}{3}=56$$

جواب نهایی: $1\times15\times56=840$

۱۰- گزینه (۴) صحیح است.

روش اول:

$$a_k = \binom{n-1+k}{k} \quad k = 0,1,...$$

می‌دانیم که دنباله‌ی $a_k = \binom{m+k}{k}$ دارای تابع مولد $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ است.

در نتیجه برای $\binom{n-1+k}{k}$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

روش دوم:

$$a_k = \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$$

اگر a_k را ساده کنید می‌بینید که یک چندجمله‌ای درجه‌ی $n-1$ است یعنی در آن k^{n-1} بزرگترین توان k است. پس مخرج کسر باید به صورت $(1-x)^n$ باشد.

گزینه (۴) درست است.

روش سوم:

$$a_0 = \binom{n-1}{0} = 1 \ , \ a_1 = \binom{n}{1} = n$$

بنابراین $f(0) = 1$ و $f'(0) = n$ است. فقط گزینه (۴) چنین است.

۱۱- گزینه (۳) صحیح است.

تابع مولد دنباله‌ی $1,2,3,...$ به این صورت است:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

می‌دانیم که $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + ...$ پس با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

روش کوتاه:

$a_n = n+1 \Rightarrow$ a_n درجه یک است

$\Rightarrow$ مخرج به فرم $(1-u)^2$ است $\Rightarrow$ گزینه (۳)

۱۲- گزینه (۳) صحیح است.

رابطه‌ی R به وضوح انعکاسی است. اگر P یک افراز باشد برای هر $A \in P$ داریم $A \subseteq A$ پس $(P,P) \in R$.

به همین ترتیب متعدی بودن R به سادگی ثابت می‌شود زیرا اگر $A_1 \subseteq A_2$ و $A_2 \subseteq A_3$ باشد آنگاه $A_1 \subseteq A_3$ است. مهم آن است که پادمتقارن بودن R را تشخیص دهید. فرض کنید:

$$P_1 = \bigcup_i \{A_i\} \quad , \quad P_2 = \bigcup_k \{B_k\}$$

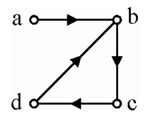
اگر $(P_1, P_2) \in R$ آنگاه برای هر i داریم:

$$\exists k \quad A_i \subseteq B_k$$

اگر $B_k \not\subseteq A_i$ آنگاه یک $x \in B_k$ هست که $x \notin A_i$ پس x باید در قطعه‌ی دیگری از P_1 باشد مثلاً $x \in A_j$ $(i \neq j)$ اما طبق فرض A_j در یک B_s قرار می‌گیرد پس $x \in B_s$ این تناقض است زیرا B_k و B_s نباید اشتراک داشته باشند.

پس $B_k \subseteq A_i$ است یعنی $A_i = B_k$ پس $P_1 = P_2$ یعنی R پادمتقارن است. پس R رابطه‌ی ترتیب است.

۱۳- گزینه (۳) صحیح است.



گراف رابطه‌ی R را رسم کنیم.

با شروع از a می‌توان به 3 رأس دیگر رفت.

با شروع از b می‌توان به 3 رأس d,c,b رفت.

به همین ترتیب با شروع از هر رأس می‌توان به 3 رأس دسترسی داشت. بنابراین:

$$|R^\infty| = 3+3+3+3 = 12$$

۱۴- گزینه (۴) صحیح است.

برای شروع فرض کنید 4 جعبه با نام‌های D,C,B,A داریم و می‌خواهیم اعداد $\{1,2,\dots,1397\}$ را در آنها توزیع کنیم طوری که هیچ جفت متوالی در یک جعبه نباشند.

تعداد کل حالات ممکن: برای عدد 1، 4 انتخاب داریم. برای 2، سه انتخاب داریم و برای سایر اعداد هم تا انتها سه انتخاب خواهیم داشت:

$$4 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 = 4 \times 3^{1396}$$

تعداد حالاتی که یکی از جعبه‌ها خالی می‌ماند:

$$\binom{4}{1} \times 3 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 12 \times 2^{1396}$$

تعداد حالاتی که دو تا از جعبه‌ها خالی می‌ماند:

$$\binom{4}{2} \times 2 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 12$$

امکان ندارد که 3 یا 4 جعبه خالی داشته باشیم. حالا با کمک طرد و شمول داریم:

$$4 \times 3^{1396} - 12 \times 2^{1396} + 12 = 12(3^{1395} - 2^{1396} + 1)$$

البته با جابه‌جا کردن قطعات 4 گانه‌ی A,B,C,D حالت‌های یکسانی در افراز خواهیم داشت

بنابراین جواب باید بر $4! = 24$ تقسیم شود:

$$\frac{1}{2}(3^{1395} - 2^{1396} + 1)$$

۱۵- گزینه (۴) صحیح است.

(a) نادرست است زیرا بستار متقارن یک رابطه‌ی متعدی، لزوماً متعدی نیست. برای مثال فرض کنید روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$: $R = \{(1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\}$

حالا R متعدی است پس بستار متعدی‌اش خودش است.

فرض کنید همه‌ی (x,x) ها را به آن اضافه کنیم:

$$R_1 = R \cup I_x$$

حالا اگر بستار متقارن R_1 را بنویسیم داریم:

$$R_2 = R_1 \cup R_1^{-1} \cup I_x$$

R_2 متعدی نیست زیرا $(3,1)$ و $(1,2)$ دارد اما $(3,2)$ ندارد.

(b) نادرست است. این رابطه باید (x,x)ها را داشته باشد (x,y) و (y,z) هم داشته باشد در ضمن (y,x) و (z,y) هم داشته باشد پس 9 عضوی خواهد بود.

۱۶- گزینه (۴) صحیح است.

برای آن که در یک گراف جهت‌دار بدون دور، ترتیب توپولوژیک منحصربفرد باشد، باید در آن گراف، به ازای هر جفت از رئوس مانند a و b، مسیری از a به b موجود باشد. در غیر این صورت، جایگاه a و b در ترتیب توپولوژیک می‌تواند به صورت $a < b$ یا $b < a$ انتخاب شود.

۱۷- گزینه (۳) صحیح است.

هر کدام از اعضای این مجموعه در 2^{n-1} زیرمجموعه، ظاهر می‌شوند. بنابراین مجموع همه‌ی اعضای همه‌ی زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$2^{n-1}(1+2+3+\ldots+n) = 2^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}2^{n-1}$$

۱۸- گزینه (۴) صحیح است.

با توجه به تعریف داده شده، زیرمجموعه‌های پوشای $\mathbb{N}$ عبارتند از تهی و مجموعه‌های به صورت $\{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$ که همه‌ی اعداد طبیعی $n \le k \le m$ عضو آن باشد و همچنین مجموعه‌های به صورت $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

حالا فرض کنید:

$$f(\varnothing) = 0$$

$$f\{n, n+1, \ldots, m\} = (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$f\{n, n+1, \ldots\} = n \in \mathbb{N}$$

در این صورت می‌بینیم که کاردینال مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های پوشا حداکثر به اندازه‌ی

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})+\mathrm{Card}(\mathbb{N})+1=N_0$ است پس یک مجموعه‌ی شمارا است. نامتنهای بودن آن هم واضح است.

۱۹- گزینه (۴) صحیح است.

می‌دانیم که هر چهار ضلعی عضو A دارای 4 رأس با مختصات گویا است. پس هر عضو A را می‌توان یک ماتریس به شکل $\begin{bmatrix}(x_1,y_1) & (x_2,y_2)\\(x_3,y_3) & (x_4,y_4)\end{bmatrix}$ در نظر گرفت که x_i ها و y_i ها عدد گویا هستند. در نتیجه:

$\mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(Q^8)=N_0^8=N_0$

در مورد B توجه کنید که به ازای هر نقطه‌ی $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ می‌توان مربعی به ضلع واحد در نظر گرفت که رأس آن (x,y) باشد. تعداد این مربع‌ها حداقل به اندازه‌ی $\mathrm{Card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ است. پس متوجه شدیم که B دارای زیرمجموعه‌ای ناشمارا است در نتیجه ناشمارا خواهد بود.

این نشان می‌دهد که $\mathrm{Card}B=c$ است.

توجه: می‌توان نشان داد که $c\times c=c\le \mathrm{Card}B\le c\times c\times c=c$.

۲۰- گزینه (۱) صحیح است.

مجموعه A دارای 15 عضو است که 8 تا از آنها فرد هستند. با انتخاب هر 3 عدد فرد به همراه یکی از زیرمجموعه‌های اعداد زوج، یک مجموعه داریم که دقیقاً 3 عدد فرد دارد. در واقع داریم:

$B=\{a,b,c\}\cup D$

که a، b و c سه عدد فرد هستند و $D\subseteq\{2,4,\ldots,14\}$ است.

(تعداد حالات B) $=\binom{8}{3}\times 2^7$

۲۱- گزینه (۲) صحیح است.

یکی از عناصر x مثلاً $x=2$ را در نظر بگیرید. عضویت یا عدم عضویت x در مجموعه‌های (A,B,C,D,E) را با دنباله‌های باینری به طول 5 نشان می‌دهیم که $32=2^5$ حالت دارند. حالا تساوی $A\cup B\cup C=D\cap E$ ایجاب می‌کند که اگر دو مؤلفه‌ی آخر به صورت‌های زیر باشند، x عضو $D\cap E$ نیست پس x نباید عضو $A\cup B\cup C$ باشد یعنی 3 مؤلفه‌ی اول صفر هستند:

$(0,0,0,0,1)$

$(0,0,0,1,0)$

$(0,0,0,0,0)$

اما اگر دو مؤلفه‌ی آخر به صورت $(-,-,-,1,1)$ باشند 3 مؤلفه‌ای اول $2^3-1=7$ حالت دارند. پس برای x در مجموع 10 حالت می‌تواند رخ دهد. طبق اصل ضرب داریم:

$10\times10\times10=1000$

۲۲- گزینه (۲) صحیح است.

سیاه را با A و سفید را با B نشان دهیم. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنیم $1 \in A$. پس 2 باید عضو B باشد زیرا $1 = 1 - 2$ است. حالت 3 می‌تواند عضو A یا B باشد.

حالت اول: $A:1$

$B:2,3$

در این حالت 4 نمی‌تواند عضو B باشد چون $2 = 2 - 4$ است. پس 4 باید عضو A باشد.

$A:1,4$

$B:2,3$

در ادامه می‌بینیم که 5 نمی‌تواند عضو هیچکدام از مجموعه‌ها باشد. مثلاً اگر $5 \in A$ باشد آنگاه $5 - 1 = 4 \in A$ که تناقض است. اگر هم $5 \in B$ باشد $5 - 3 = 2 \in B$ که تناقض است.

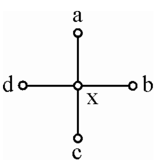
حالت دوم: $A:1,3$

$B:2$

در این حالت 4 نمی‌تواند عضو هیچکدام از مجموعه‌ها باشد.

نتیجه: حداکثر مقدار n در حالتی به دست می‌آید که $A = \{1,4\}$ و $B = \{2,3\}$ باشد یعنی $n = 4$.

۲۳-گزینه (۳) صحیح است.

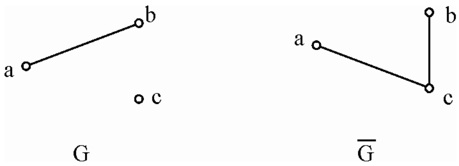


ابتدا از بین 100 رأس گراف، 4 تا انتخاب می‌کنیم تا بخش $\{a,b,c,d\}$ را تشکیل دهند سپس از بین 96 رأس دیگر یکی را برای بخش $\{x\}$ انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{100}{4} \times 96$$

۲۴- گزینه (۱) صحیح است.

گزینه (۱) به وضوح غلط است برای مثال:



G و $\overline{G}$ هر دو دوبخشی هستند.

گزینه (۲) در متن درس مطرح شده است.

گراف دوبخشی منتظم به صورت $K_{n,n}$ است پس $2n$ رأس دارد. گزینه (۴) هم واضح است زیرا اگر G دوبخشی باشد در آن طول به دور فرد وجود ندارد پس در $G - e$ هم دور به طول فرد وجود ندارد.

۲۵-گزینه (۳) صحیح است.

هر درخت نابدیهی حداقل 2 برگ دارد و به ازای هر رأس میانی درجه‌ی d، تعداد $d-2$ برگ به آن اضافه می‌شود. پس هر رأس درجه‌ی 5 باعث اضافه شدن 3 برگ به درخت می‌شود.

$$1 \geq 2+3(5-2)=11$$

۲۶- گزینه (۴) صحیح است.

رأس $\{1,2,3\}$ را در نظر بگیرید. این رأس با رأس‌های $\{1,x,y\}$ و $\{2,x,y\}$ و $\{3,x,y\}$ مجاور است که x و y باید عضو $\{4,5,...,10\}$ باشند. بنابراین درجه‌ی این رأس برابر است با:

$$3\times\binom{7}{2}$$

همه‌ی رئوس دیگر هم به شکل مشابه همین درجه را دارند. تعداد کل رأس‌ها $\binom{10}{3}$ است.

$$\text{تعداد یال‌ها} = \frac{1}{2}\ (\text{مجموع درجات})$$

$$=\frac{3}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{3}=3780$$

۲۷- گزینه (۲) صحیح است.

فقط با توجه به q_{max} مسئله را حل می‌کنیم. کمترین درجه‌ی رأس‌ها $\delta=3$ است بنابراین در هر کدام از مؤلفه‌ها حداقل باید 4 رأس داشته باشیم. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها هنگامی به دست می‌آید که 3 مؤلفه‌ی K_7,K_4,K_4 داشته باشیم.

$$q_{max}=\binom{7}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{2}=33$$

۲۸- گزینه (۱) صحیح است.

گراف G به وضوح اویلری نیست چون رأس درجه فرد دارد. برای مثال رأس 2 با رأس‌های شماره‌ی فرد مجاور است که تعداد آنها 9 تا است. از طرفی چون دو عدد متوالی همیشه نسبت به هم اولند پس مسیر ساده‌ی $2,3,4,...,19,20$ یک مسیر همیلتونی در G است.

۲۹- گزینه (۲) صحیح است.

گراف $K_{n,m}$ دارای $n+m$ رأس و nm یال است. هر درخت فراگیر دارای $n+m-1$ یال است. بنابراین باید داشته باشیم: $nm=3(n+m-1)$

اگر $n=1$ باشد $m=3m$ به دست می‌آید که غیرممکن است زیرا $m\geq 1$ است.

اگر $n=2$ باشد $2m=3m+3$ است که غیرممکن است.

به همین ترتیب می‌بینیم که فقط دو حالت ممکن برای این تساوی داریم که $(n,m)=(4,9)$ و

$(n,m)=(5,6)$ هستند. دقت کنید که $K_{n,m}$ با $K_{m,n}$ تفاوتی ندارد.

۳۰- گزینه (۳) صحیح است.

دو گراف K_4 با یک رأس برشی به هم متصل شده‌اند، بنابراین:

$$\tau(G)=4^{4-2}\times 4^{4-2}=2^8$$

۳۱- گزینه (۱) صحیح است.

(a) واضح است. درخت‌ها دوبخشی هستند و عدد رنگی آنها 2 است پس $|V|=|A|+|B|$ که A رئوس آبی و B رئوس قرمز هستند. از آنجا که $|A|+|B|=n$ پس حداقل یکی از آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است.

(b) واضح است زیرا در رئوس میانی به ازای هر ورود یک خروج داریم اما در ابتدا یک خروج داریم که ورودی نداشته و در انتها یک ورود داریم که خروجی ندارد.

بهتر بود از واژه‌ی گذر در این سؤال استفاده می‌شد.

۳۲-گزینه (۳) صحیح است.

اولاً $1\in S$ است بنابراین با استفاده از قانون $(x\in S\Rightarrow x+3\in S)$ خواهیم داشت:

$$1,4,7,10,13,16,19\in S$$

در ضمن چون $1\in S$ است با استفاده از قانون $(x\in S\Rightarrow (x-2)^2+2\in S)$ داریم: $3\in S$. حالا با استفاده از قانون اول داریم:

$$3,6,9,12,15,18\in S$$

سایر اعدادی که با این قوانین عضو S می‌شوند بزرگتر از 20 هستند. پس: S دارای 13 عضو کوچکتر یا مساوی 20 است.

۳۳-گزینه (۴) صحیح است.

از صورت سؤال استفاده می‌کنیم تا گزینه صحیح را به سرعت تشخیص دهیم. برای مثال اگر $n=10$ را در نظر بگیرید، هر مضرب n باید رقم یکان صفر داشته باشد پس حداقل یکی از ارقام a یا b باید صفر باشد. پس گزینه (۴) صحیح است.

توجه: برای آن که a و b بتوانند برای هر $n\geq 1$ مضربی از n را ایجاد کنند یکی از آنها باید صفر باشد و دیگری یک عدد اول فرد باشد.

۳۴-گزینه (۲) صحیح است.

گزینه (۲) نادرست است، اعدادی که بر 3 بخش‌پذیر نیستند، به فرم $3k+1$ و $3k+2$ هستند و تعداد آنها روی هم بیش از نصف اعضای مجموعه را تشکیل می‌دهد. برای مثال از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ می‌توان $\{1,2,4\}$ را انتخاب کرد که هیچکدام بر 3 بخش‌پذیر نیستند.

گزینه (۱) یک نتیجه معروف اصل لانه کبوتری است.

گزینه‌های (۳) و (۴) هم واضح هستند.

برای مثال تعداد اعداد فرد n تا است پس در n+1 عدد حتماً یک زوج وجود خواهد داشت.