

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات
نکته و تست

استاد: ابوالفضل گیلک

صبح جمعه

۱۳۹۸/۳/۲۴



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود..»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۸

مجموعه مهندسی کامپیوتر - کد (۱۲۷۷)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

۴۷- در تمامی جایگشت‌های مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ ، به‌طور میانگین چند عضو در جای خود قرار نمی‌گیرند؟

(۱)

(۲) $\frac{1}{n}$

(۳) $1 - \frac{1}{n}$

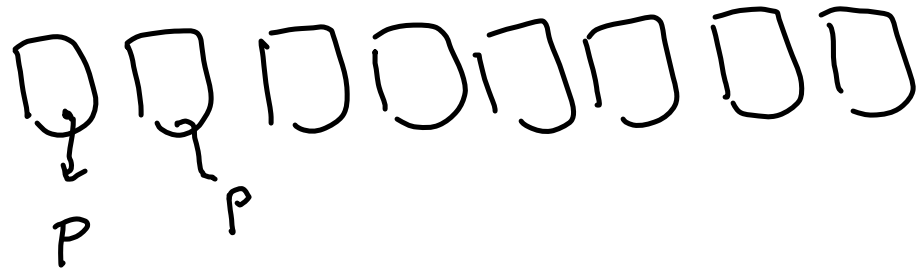
(۴) $n - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{کل} = n! \\ \text{پیرسی} = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right) \end{array} \right.$$

برآورد:

احتمال $\frac{1}{n}$ در جای خود

احتمال $\frac{n-1}{n}$ در جای خود قرار ندارد.



$$E[X] = n \times p$$

پاسخ: گزینۀ (۴)

برای هر کدام از اعداد $x = 1, 2, \dots, n$ احتمال آن که در محل خود قرار داشته باشد، $\frac{1}{n}$ و احتمال آن که در محل خود نباشد، $\frac{n-1}{n}$ است.

بنابراین با فرض این احتمال در تعداد اعداد داریم:

$$n \frac{n-1}{n} = n-1$$

پادآوری: در درس آمار و احتمال می‌دانیم که اگر تعداد آزمایش‌های مستقل n ، احتمال وقوع p در هر کدام p باشد، مقدار متوسط پیروزی‌ها np است.

بررسی عددی: به ازای $n=3$ این جایگشت‌ها را داریم که تعداد اعدادی که در محل خود نیستند را برای هر کدام نوشته‌ایم.

۱۲۳, ۱۳۲, ۲۱۳, ۲۳۱, ۳۱۲, ۳۲۱
۰, ۲, ۲, ۳, ۳, ۲

$$\text{متوسط} = \frac{0+2+2+3+3+2}{6} = 2$$

۴۸- اگر M و F دو گزاره‌نما باشند، بزرگ‌ترین مجموعه عبارات هم‌ارز از بین عبارات‌های زیر چه اندازه‌ای دارد؟

• $\forall x[M(x) \rightarrow \neg F(x)]$

• $\neg \exists x[F(x) \wedge M(x)]$

• $\forall x[F(x) \rightarrow \neg M(x)]$

• $\forall x[M(x) \rightarrow F(x)]$

• $\neg \forall x[\neg F(x) \vee \neg M(x)]$

• $\forall x[\neg(M(x) \wedge \neg F(x))]$

• $\neg \exists x[M(x) \wedge \neg F(x)]$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ✓

۴ (۴)

برای راحتی بیشتر همی نقیض‌ها را اثر بدعید. همی ستمی‌ها را به صورت OR
نویسید.

$$(\exists x \, p(x)) \rightarrow R(y)$$

$$[\forall x \, \sim p(x)] \vee R(y)$$

$$\exists x \, (p(x) \rightarrow R(y))$$

$$\exists x \, (\sim p(x) \vee R(y))$$

۴۸- اگر F و M دو گزاره‌ها باشند، بزرگ‌ترین مجموعه عبارات هم‌ارز از بین عبارات‌های زیر چه اندازه‌ای دارد؟

این‌ها معادله

$$\begin{aligned}
 A: & \forall x [\sim M \vee \sim F] \\
 B: & \forall x [\sim F \vee \sim M] \\
 C: & \forall x [\sim F \vee \sim M] \\
 D: & \forall x [\sim M \vee F] \\
 E: & \exists x [F \wedge M]
 \end{aligned}$$

$\forall (F) \quad \quad \quad \exists (F)$

- $\forall x [M(x) \rightarrow \neg F(x)]$ • A
- $\neg \exists x [F(x) \wedge M(x)]$ • B
- $\forall x [F(x) \oplus \neg M(x)]$ • C
- $\forall x [M(x) \rightarrow F(x)]$ • D
- $\neg \forall x [\neg F(x) \vee \neg M(x)]$ • E
- $\forall x [\neg (M(x) \wedge \neg F(x))]$ • F
- $\neg \exists x [M(x) \wedge \neg F(x)]$ • G

$\forall (F) \quad \quad \quad \exists (F)$

$$\begin{aligned}
 F: & \forall x [M \vee F] \\
 G: & \forall x [\sim M \vee F]
 \end{aligned}$$

سایه جملات همکارم با این سه جمله معادل
نمیتند.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \sim A \vee B \end{array}}$$

معادل:

تست ۴۸
پاسخ: گزینه (۳)

می دانیم که:

$$\sim \exists x [F(x) \wedge M(x)] \equiv \forall x [\sim F(x) \vee \sim M(x)]$$

از طریقی می دانیم که عبارت ~~معادل~~

$\sim p \vee \sim q$ را می توان به صورت های معادل

$$q \rightarrow \sim p \quad \text{و} \quad p \rightarrow \sim q$$

نوشت. بنابراین این جملات معادل هستند:

$$\forall x [\sim F(x) \vee \sim M(x)]$$

$$\forall x [F(x) \rightarrow \sim M(x)]$$

$$\forall x [M(x) \rightarrow \sim F(x)]$$

۴۹- کدام یک از مجموعه‌های زیر ناشمارا است؟

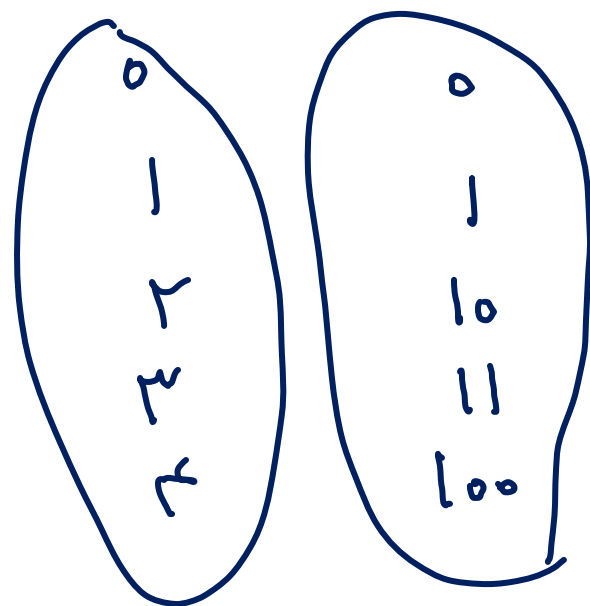
(۱) مجموعه تمام اعداد اول

(۲) مجموعه تمام رشته‌های دودویی با طول متناهی

(۳) مجموعه تمام انسان‌های روی کره زمین از ابتدا تا ابد

(۴) مجموعه اعداد گنگ بین هر دو عدد گویای متمایز ✓

هم‌رشته بودن در $R \simeq$ شمارا
رشته بودن در $W \simeq$ شمارا



شمارا {
 مستطی
 شمار نامستطی

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_e \simeq \mathbb{N}_o \simeq \mathbb{N}_p \simeq$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned}
 \text{اعداد جبری} &= \mathbb{Q} \cup \{ \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{5}}, \dots \} \\
 &\text{صحيح ياكى [توڻا]}
 \end{aligned}$$

۱/۴۱:

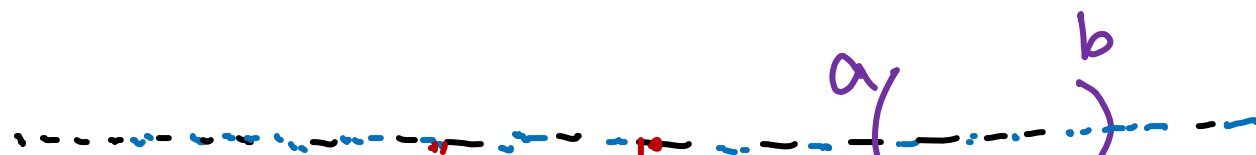
$a < b$

$\mathbb{R}$

$[a, b]$



$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$$



نویسندگان
نویسندگان

$\mathbb{N}$

1

2

3

4

0

-

.

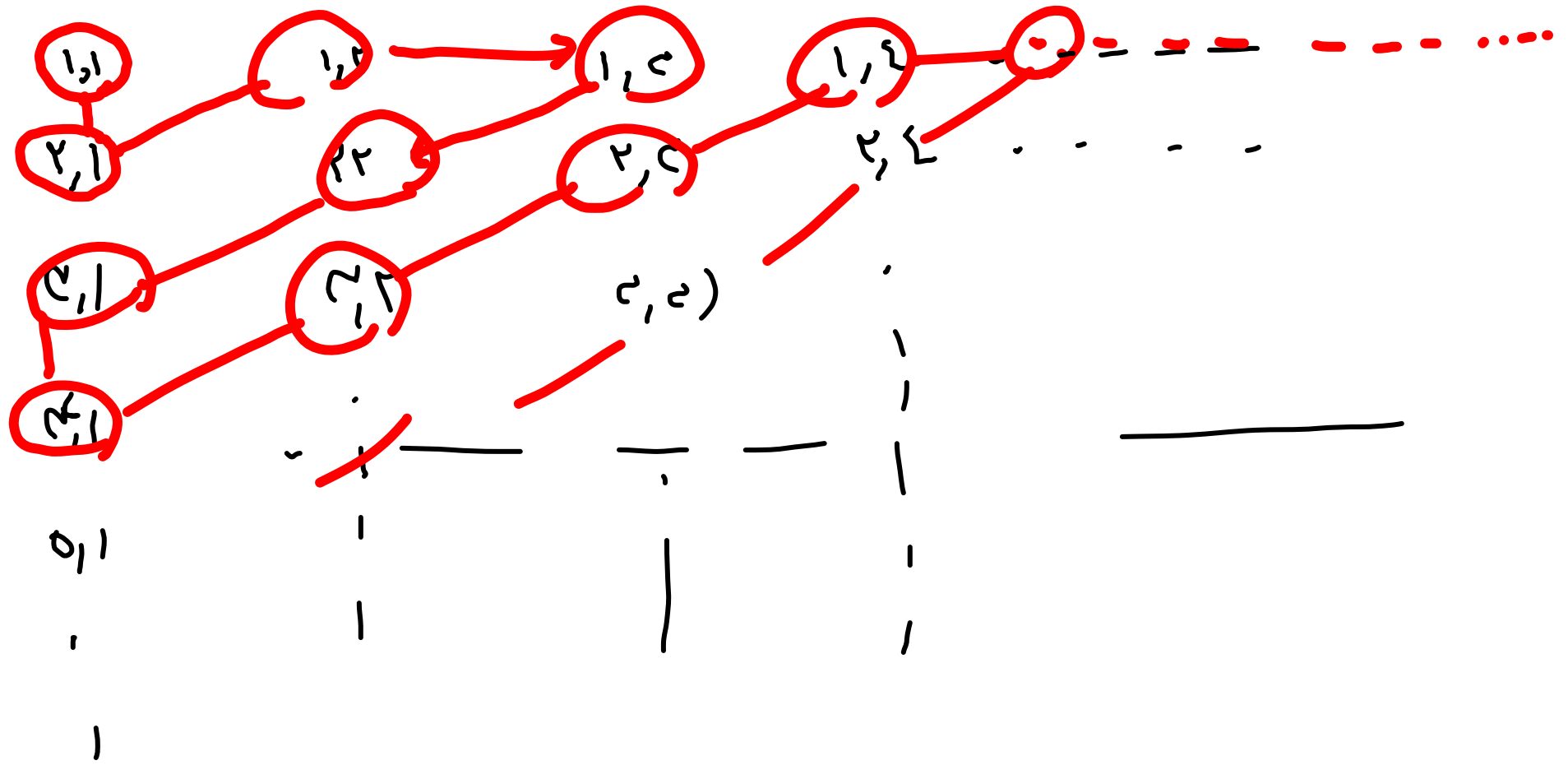
.

.

-

-

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



مجموعه سرکامپیوتر ۹۸

تست ۴۹ گزینیه (۱۴)

مجموعه‌ی اعداد گنگ در هر بازه به صورت (a, b) که $a < b$ باشد، ناشمار است.

یعنی $(a, b) \cap \mathbb{Q}^c$ ناشمار است.

در اینجا مهم نیست که a و b عدد گویا باشند یا گنگ باشند یا هر عدد دلخواه حقیقی.

باید گزینیه‌ها شما را بپسند. مجموعه‌ی هم‌اندازه با همه‌ی گنگ‌ها یا هم‌درختان، و هر چیزی که قابل بر حسب زدن با اعداد طبیعی باشد، شمار است.

...

اعداد اول زیر مجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N}$ هستند. رسته‌های دودویی متناهی، شمار هستند. اما مجموعه‌ی همه‌ی رسته‌های دودویی، ناشمار است.

۵۰- فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه متناهی S باشد. با توجه به دو گزاره زیر کدام گزینه صحیح است؟

الف) اگر R یک رابطه هم ارزی و تعداد اعضای آن فرد باشد، آنگاه اندازه S نیز فرد است. ✓

ب) اگر R یک رابطه ترتیب جزئی و تعداد اعضای آن زوج باشد، آنگاه اندازه S نیز زوج است. ✗

(۱) الف) درست، ب) درست

(۲) الف) نادرست، ب) درست

(۳) الف) درست، ب) نادرست

(۴) الف) نادرست، ب) نادرست

$$S = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$R = \{(1,1), \dots, (n,n)\} \cup \{(i,j), (j,i)\}$$

$$|R| = |S| + 2K$$

فرد فرد

اگر $|K| = n$ باشد آنگاه کوکرتی رابطی
هم ارزی روی K همان I_K است که n
زوج مرتب دارد. اگر بخواهیم زوج مرتب دیگری
به R اضافه کنیم به علت ویژگی تقارن
باید معکوس آن را هم به R اضافه کنیم:

$$|R| = n + 2K$$

دس (الف) صحیح است.

اما (ب) نادرست است زیرا رابطی ترتیب جزئی
لازم نیست متقارن باشد. مثلاً:

$$K = \{a, b, c\}$$

$$R = I_K \cup \{(a, b)\}$$

R دارای ۴ زوج مرتب است اما K سه عضوی
است.

$$\log_B A = \frac{\log A}{\log B}$$

از سؤالات داده الگوریتم:

۵۱- پاسخ رابطه بازگشتی زیر کدام است؟

$$T(n) = T(n / \log n) + O(1)$$

(۱) $O(\log n)$

(۲) $O(\log \log n)$

(۳) $O(\log n / \log \log n)$ ✓

(۴) $O(\log n / (\log \log n)^2)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{b(n)}\right) + O(1)$$

و کوانتیا عدد ثابت بر خورد کرد

$$T(n) = O(\log n) = O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$$

$$T(n) = \overset{\textcircled{1}}{\quad} \rightarrow T\left(\frac{n}{b}\right) + \overset{\text{ثابت}}{O(1)}$$

در حالت:

$$T(n) = O(h(n))$$

که ارتفاع

ارتفاع:

$$T(n) = T(n-c) + \dots$$

$$O(n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{b}\right) +$$

$$\log_b n$$

$$T(n) = T\left(\frac{\sqrt[p]{n}}{b}\right) + \dots$$

$$\log_p \log_2(n)$$

$$T(n) = T(\log n) + \dots$$

$$\log^*(n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{b(n)}\right) + \dots$$

بہت طویل

$$b\left(\frac{n}{b(n)}\right) \simeq \theta(b(n))$$

بازے کی گواہی

ب $b(n)$ میں کیا عدد باب پر فور رکیز

$$h = \log_{b(n)} n$$

$$b(n) = \log n$$

$$b\left(\frac{n}{\log n}\right) = \log\left(\frac{n}{\log n}\right) = \log n - \log \log n = \Theta(\log n) \\ = \Theta(b(n))$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right) + O(1)$$

$$b(n) = \sqrt{n}$$

$$b\left(\frac{n}{b(n)}\right) \stackrel{?}{=} b(n)$$

$$\sqrt{\frac{n}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{n^1}{n^{1/2}}} = \sqrt{n^{1/2}} \neq b(n)$$

$$T(n) = T(\sqrt[n^r]{n}) + O(1)$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$T(n) = T(n^\alpha) + 1$$

$$\sqrt{n}$$

ارتفاع :
 $\log \log n$

عصر پنجشنبه

۱۳۹۸/۳/۲۳



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۸

مهندسی فناوری اطلاعات (IT) – کد (۱۲۷۶)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

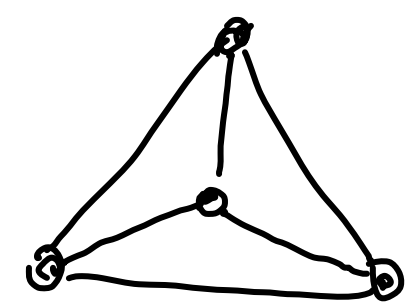
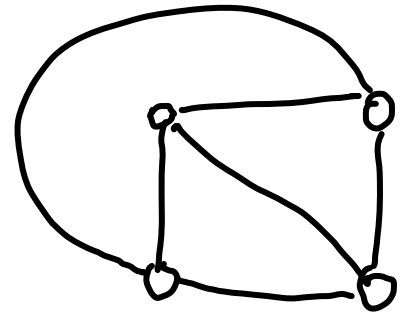
۳۱- گراف ساده مسطح همبند G را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد این گراف صحیح است؟

(۱) حداکثر $\frac{1}{2}$ رأس‌های گراف درجه حداکثر ۴ دارند.

(۲) حداکثر $\frac{1}{4}$ رأس‌های گراف درجه حداکثر ۵ دارند.

(۳) حداکثر $\frac{1}{4}$ رأس‌های گراف درجه حداکثر ۶ دارند.

(۴) حداکثر $\frac{1}{2}$ رأس‌های گراف درجه حداکثر ۱۱ دارند.



$$n=4$$

$$n$$

همه گزینه‌ها غلط هستند K_4

۳۲- یک سکه را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا یکی از دو اتفاق زیر رخ دهد:

۱- ده بار متوالی شیر بیاید.

۲- یک بار خط و پس از آن نه بار شیر بیاید.

با چه احتمالی اتفاق اول باعث خاتمه پرتاب می‌شود؟

$$(1) \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{1}{2^9}$$

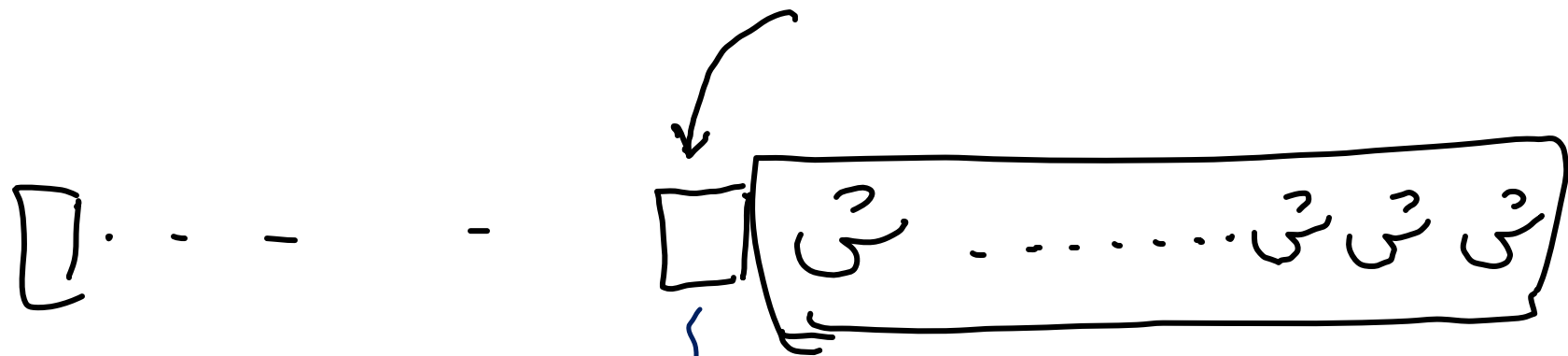
$$(3) \frac{1}{2^{10}}$$

$$(4) \frac{1}{10}$$

ما احتمال آن را می‌خواهیم؛

دو تا می‌شود متوالی ظاهر شود و آن کل

و ضعیف نمی‌شود... نمی‌شود... نمی‌شود... اتفاق می‌افتد.



ما تا

نه می تواند بسته باشد
 نه خطی اصل دیربایی قبل
 از آن ها دیرباب وجود ندارد

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

۳۳- جواب عمومی رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + 10a_{n-2} + \Delta^n$ کدام است؟

$$\Delta^n = 2\Delta^{n-1} + 10\Delta^{n-2}$$

$$\Delta^2 - 2\Delta - 10 = 0$$

$$(\Delta - 5)(\Delta + 2) = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$\Delta = -2$$

$$1 \times \Delta^n$$

$$a_n = c_1 \Delta^n + c_2 2^n \quad (1)$$

$$a_n = c_1 \Delta^n + c_2 (-2)^n \quad (2)$$

$$a_n = c_1 n \Delta^n + c_2 (-2)^n \quad (3)$$

$$a_n = (c_1 n + c_2) \Delta^n + c_2 (-2)^n \quad (4) \checkmark$$

$$c_1 \Delta^n + c_2 (-2)^n + \boxed{A_n \Delta^n}$$

مقدار n باید ستون چون Δ^n تکراری است.

عصر پنجشنبه

۱۳۹۸/۳/۲۳



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۸

مهندسی فناوری اطلاعات (IT) – کد (۱۲۷۶)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

۳۴- تعداد اعداد طبیعی و غیر اول $n > 1$ که $(n-1)!$ بر n بخش پذیر نباشد، کدام است؟

(۴) بی نهایت

(۳) ۲

(۲) ۱ ✓

(۱) ۰

$$\underline{n = m \times k}$$

$$\overbrace{1 < m, k < n}^{m \neq k}$$

$$(n-1)! = 1 \times 2 \times \dots \times \overset{\uparrow m}{\dots} \times \overset{\uparrow k}{\dots} \times (n-1)$$

در این حالت.
 $(n-1)!$ بر n بخش پذیر است.

$$1 < p < n$$

$$n = p \times p$$

حالت دیگر آن است که

$$(n-1)! = 1 \times 2 \times \dots \times \boxed{p} \times \dots \times (n-1)$$

برای آن که $(n-1)!$ بر n بخش پذیر شود لازم است که $p > n-1$ باشد.

$$\boxed{\begin{array}{l} n = p^r \\ p \text{ اول} \end{array}} \Rightarrow p > n-1$$

$$\begin{cases} n = p^2 \\ 2p > n-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$2p > p^2 - 1 \xrightarrow{p \text{ اول}}$$

فقط $p=2$
صدق می‌کند.

$$n = p^2 = 2^2 = 4$$

تنها عدد با ویژگی خواسته شده:

۳۵- اگر R_1 و R_2 دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A باشند، کدام مورد یک رابطه هم‌ارزی روی A است؟

(۲) $R_1 \times R_2$

(۴) $R_1 \cup R_2$

(۱) $R_1 - R_2$

(۳) $R_1 \cap R_2$



OK
اجماع

OK
اشتهار

بازتابی

OK
اجماع

OK
اشتهار

مقابل

OK
اجماع
NOT

OK
اشتهار

صفه‌ی

۳۶- با توجه به دو گزاره زیر، کدام مورد صحیح است؟
 الف) هر مجموعه خوش ترتیب شمارا است. ←
 ب) هر مجموعه شمارا خوش ترتیب است.
 (۱) هر دو مورد صحیح هستند.
 (۲) هر دو مورد غلط هستند.
 (۳) مورد الف صحیح و مورد ب غلط است. ✓
 (۴) مورد الف غلط و مورد ب صحیح است.

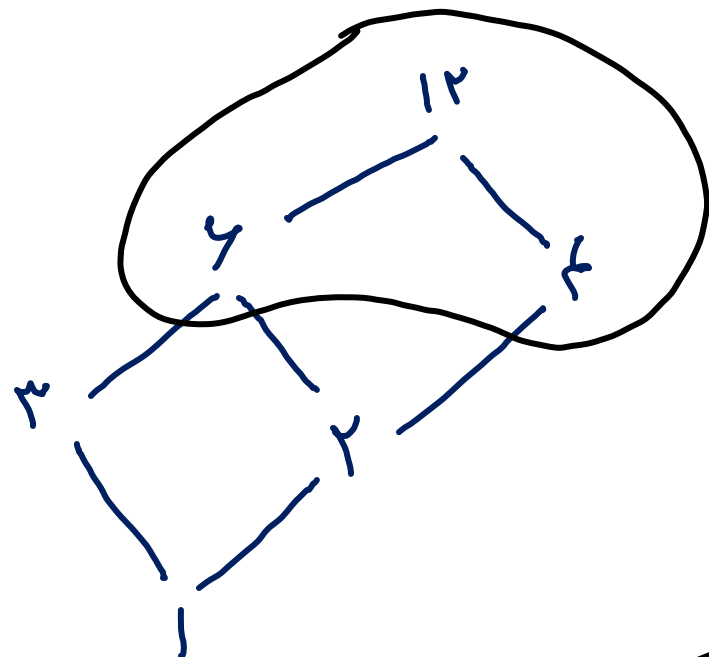
اما صبیق اصل خوشی که مجموعه مجزئ نامکرا یا شمارای نامکرا را
 نمی توان خوشی ترتیب کرد.

خبر مثلاً در فضای $\mathbb{Q}$ با ترتیب معمولی اعداد داریم:

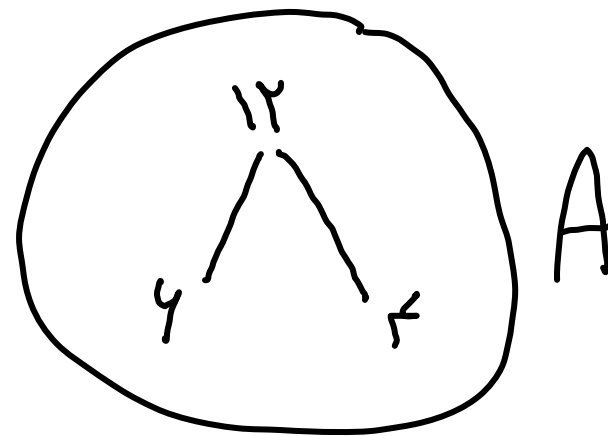
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x\}$$

$\min A$ در $\mathbb{Q}$ وجود ندارد.

D_{12}



$a < b$
 $a \mid b$

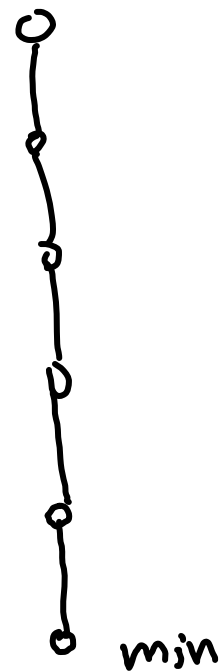


A

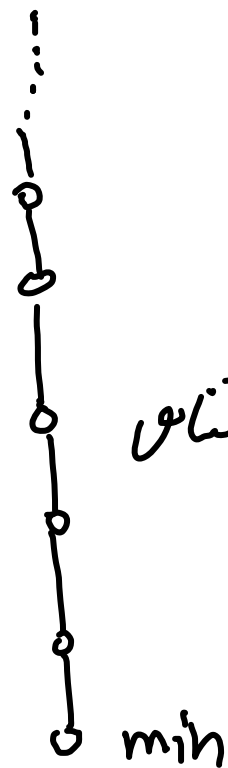
D_{12} خوش‌ترکیب است. $\min A$ وجود ندارد. $A \subseteq D_{12}$ $A \neq \emptyset$

خوشتای ترتیب در این شکل هستند

مستقیم



نامستقیم



مثلاً

N

مثلاً

N_e

مثلاً

$\{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbb{N}$

D_{27}

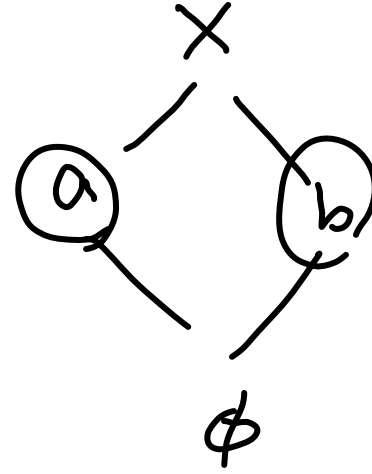


D_n ها به سه ضی خوش رتیب به $n = p^k$ (ک-اتم)

دیز رتیب ضی (کلی) به اکند.

$$X = \{a, b\}$$

$$(P(X), \subseteq)$$



جبر بول است اما فونیکریٹیک .

از سوالات داده‌انگزریم:

۳۷- رابطه بازگشتی $T(n) = \lambda T(n/2) + f(n)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع $g(n)$ یکی از توابع

$n, n \log n, n^3, n^4 \log n$ باشد. به ازای چند تا از این ۴ تابع، تابع $f(n)$ وجود دارد، به طوری که

$$T(n) = O(g(n)) \text{ ؟}$$

معمولاً $f(n) > 0$ است. اگر آن را مثبت بگیریم گزین (۲) جواب است.

۱ (۱)

۲ (۲) ✓

۳ (۳)

۴ (۴) ✓

$$\text{if } f(n) > 0 \Rightarrow p = \log_2 n = 2$$

$$T(n) = O(n^2 \dots) \Rightarrow \text{گزینه (۲)}$$

اما اگر واقعاً طبق صورت سؤال $f(n)$ دلخواه باشد گزین (۴) جواب است؛

$$\text{if } f(n) \text{ دلخواه} \Rightarrow T(n) = O(\text{هر چیز دلخواه}) \Rightarrow \text{گزینه (۴)}$$

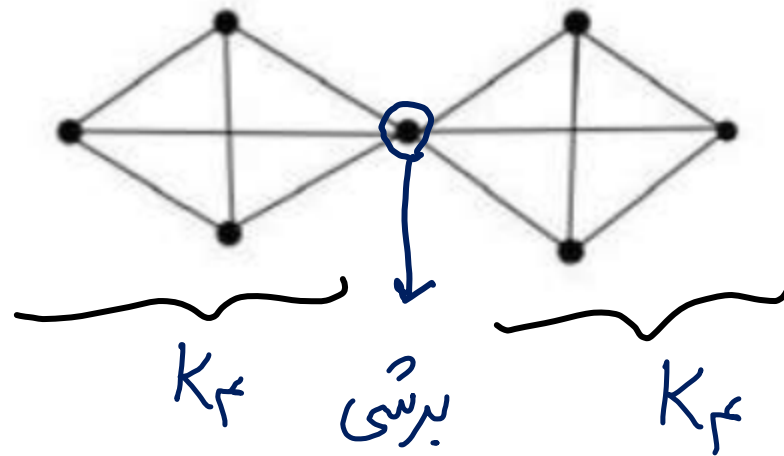
آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

مهندسی فناوری اطلاعات (IT) - کد (۱۲۷۶)

مدت پاسخگویی: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۰۰

۳۱- تعداد درخت‌های پوشای گراف زیر چندتا است؟



2^4 (۱)

2^6 (۲)

2^8 (۳) ✓

2^{10} (۴)

$$T(G) = 2^{4-2} \times 2^{4-2}$$

$$= 14 \times 14 = 2^8$$

دو گراف K_4 با یک رأس برشی به هم متصل شده‌اند، بنابراین:

$$\tau(G) = 4^{4-2} \times 4^{4-2} = 2^8$$

۳۲- با توجه به دو گزاره داده شده، کدام مورد درست است؟

(a) اگر از یک رابطه دل خواه روی یک مجموعه متناهی، به ترتیب بستارهای ترایی، بازتابی و تقارنی بگیریم، به یک رابطه هم ارزی می‌رسیم.

(b) کوچک‌ترین رابطه روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ که بازتابی و متقارن باشد، ولی ترایی نباشد ۱۰ عضو دارد.

(۱) (a) درست ، (b) درست

(۲) (a) نادرست ، (b) درست

(۳) (a) درست ، (b) نادرست

(۴) (a) نادرست ، (b) نادرست ✓

خط

روش صحیح برای رسیدن به رابطه‌ی هم‌ارزی آن است که بتدریج تقارنی

را قبل از بتدریج صدق (ترایی) قرار دهیم.

بتدریج انعکاس هم نوبت استی حجاب است هم نیست.

(a) نادرست است زیرا بستار متقارن یک رابطه‌ی متعدی، لزوماً متعدی نیست. برای مثال فرض کنید روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$:

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

حالا R متعدی است پس بستار متعدی‌اش خودش است.

فرض کنید همه‌ی (x,x) ها را به آن اضافه کنیم:

$$R_1 = R \cup I_x$$

حالا اگر بستار متقارن R_1 را بنویسیم داریم:

$$R_2 = R_1 \cup R_1^{-1} \cup I_x$$

R_2 متعدی نیست زیرا $(3,1)$ و $(1,2)$ دارد اما $(3,2)$ ندارد.

(b) نادرست است. این رابطه باید (x,x) ها را داشته باشد (x,y) و (y,z) هم داشته باشد در ضمن (y,x) و (z,y) هم داشته باشد پس 9 عضوی خواهد بود.

۳۳- تابع مولد دنباله ۱، ۲، ۳، ۴، ... کدام است؟

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3$$

⋮

$$a_n = n + 1$$

پس ۱ است.



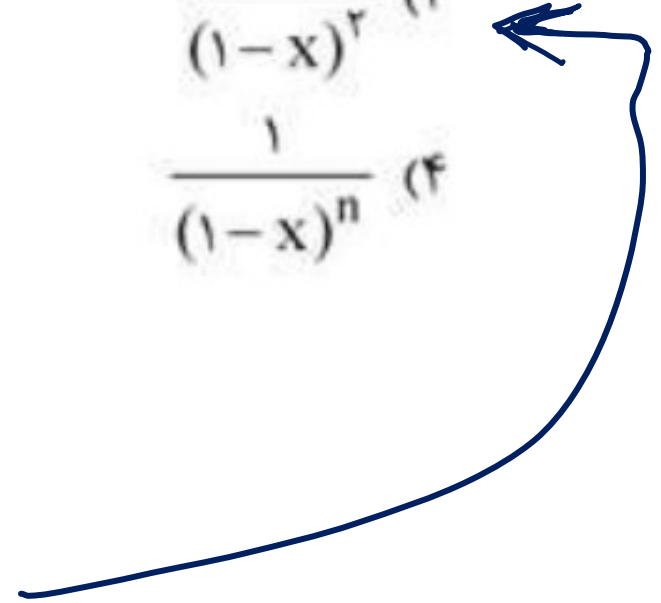
$$f(x) = \frac{\dots}{(\dots)^n}$$

$$\frac{1}{1-x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-x^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} \quad (4)$$



تابع مولد دنباله‌ی $1, 2, 3, \dots$ به این صورت است:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

می‌دانیم که $x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$ پس با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

روش کوتاه:

$$a_n = n + 1 \Rightarrow a_n \text{ درجه یک است}$$

$$\Rightarrow \text{گزینه (۳)} \Rightarrow \text{مخرج به فرم } (1-u)^2 \text{ است}$$

۳۴- با توجه به دو گزاره داده شده، کدام مورد درست است؟

(a) در هر درخت n راسی اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل حداقل $\frac{n}{2}$ است.

(b) اگر T یک گشت ماکزیمال در گراف G باشد که دو رأس ابتدایی و انتهایی آن متفاوت است، آن‌گاه درجه دو رأس ابتدایی و انتهایی T در G فرد است.

(۱) (a) درست ، (b) درست

(۲) (a) نادرست ، (b) درست

(۳) (a) درست ، (b) نادرست

(۴) (a) نادرست ، (b) نادرست

(a) واضح است. درخت‌ها دوبخشی هستند و عدد رنگی آنها 2 است پس $|V| = |A| + |B|$ که A رئوس آبی و B رئوس قرمز هستند. از آنجا که $|A| + |B| = n$ پس حداقل یکی از آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است.

(b) واضح است زیرا در رئوس میانی به ازای هر ورود یک خروج داریم اما در ابتدا یک خروج داریم که ورودی نداشته و در انتها یک ورود داریم که خروجی ندارد. بهتر بود از واژه‌ی گذر در این سؤال استفاده می‌شد.

۳۶- کدام شرط برای یکتا بودن ترتیب توپولوژیکی در یک گراف جهت‌دار بدون دور، لازم و کافی است؟

(۱) گراف قویا هم‌بند باشد.

(۲) بین هر دو رأس یک یال باشد.

(۳) ترتیب توپولوژیکی همیشه یکتا است.

(۴) به ازای هر دو رأس u و v ، از u به v یا از v به u مسیر باشد.

برای آن که در یک گراف جهت‌دار بدون دور، ترتیب توپولوژیک منحصر بفرد باشد، باید در آن گراف، به ازای هر جفت از رئوس مانند a و b ، مسیری از a به b موجود باشد. در غیر این صورت، جایگاه a و b در ترتیب توپولوژیک می‌تواند به صورت $a < b$ یا $b < a$ انتخاب شود.

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

مهندسی کامپیوتر - کد (۱۲۷۷)

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۰

۴۷- اگر تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ را نوشته و اعضای آن‌ها را با هم جمع کنیم، عدد به دست آمده کدام است؟

$$\binom{n}{2} 2^{n-1} \quad (1)$$

$$\binom{n+1}{2} 2^n \quad (2)$$

$$\binom{n+1}{2} 2^{n-1} \quad (3)$$

$$\binom{n}{2} \times 2 \times 2^{n-1} \quad (4)$$

هر کدام از اعضای این مجموعه در 2^{n-1} زیرمجموعه، ظاهر می شوند. بنابراین مجموع همه ی اعضای همه ی زیرمجموعه ها برابر است با:

$$2^{n-1}(1+2+3+\dots+n) = 2^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} 2^{n-1}$$

۴۸- مجموعه A از اعداد طبیعی «پوشا» است، اگر داشته باشیم:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (y > x)) \rightarrow (\forall z \in \mathbb{N} : ((z > x) \wedge (z < y)) \rightarrow (z \in A))$$

اگر مجموعه تمام زیرمجموعه‌های پوشا از اعداد طبیعی را مجموعه B بنامیم، کدام مورد درست است؟

(۱) مجموعه B تهی است.

(۲) مجموعه B ناشمارا است.

(۳) مجموعه B متناهی و ناتهی است.

(۴) مجموعه B شمارا و نامتناهی است.

با توجه به تعریف داده شده، زیرمجموعه‌های پوشای $\mathbb{N}$ عبارتند از تهی و مجموعه‌های به صورت $\{n, n+1, n+2, \dots, m\}$ که همه‌ی اعداد طبیعی $n \leq k \leq m$ عضو آن باشد و همچنین مجموعه‌های به صورت $\{n, n+1, n+2, \dots\}$.

حالا فرض کنید: $f(\emptyset) = 0$

$$f\{n, n+1, \dots, m\} = (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$f\{n, n+1, \dots\} = n \in \mathbb{N}$$

در این صورت می‌بینیم که کاردینال مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های پوشا حداکثر به اندازه‌ی $\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) + \text{Card}(\mathbb{N}) + 1 = \aleph_0$ است پس یک مجموعه‌ی شمارا است. نامتنهای بودن آن هم واضح است.

۵۰- تابع مولد دنباله $\underbrace{\binom{n-1}{0}}_{a_0}, \underbrace{\binom{n}{1}}_{a_1}, \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{a_2}, \dots$ کدام است؟

$$a_k = \binom{n-1+k}{k}$$

$$\frac{1}{1-x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-x^n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} \quad (4)$$

روش اول:

$$a_k = \binom{n-1+k}{k} \quad k = 0, 1, \dots$$

می‌دانیم که دنباله‌ی $a_k = \binom{m+k}{k}$ دارای تابع مولد $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ است.

در نتیجه برای $\binom{n-1+k}{k}$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

روش دوم:

$$a_k = \binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$$

اگر a_k را ساده کنید می‌بینید که یک چندجمله‌ای درجه‌ی $n-1$ است یعنی در آن k^{n-1} بزرگترین توان k است. پس مخرج کسر باید به صورت $(1-x)^n$ باشد. گزینه (۴) درست است.

روش سوم:

$$a_0 = \binom{n-1}{0} = 1, \quad a_1 = \binom{n}{1} = n$$

بنابراین $f(0) = 1$ و $f'(0) = n$ است. فقط گزینه (۴) چنین است.

۵۰- تابع مولد دنباله $\binom{n-1}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots$ کدام است؟

$$a_k = \binom{r+k}{k}$$

$$= \frac{(r+k)!}{k! r!} = \frac{(k+r)(k+1)}{r}$$

$$r, 1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{(\dots)^r}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} \quad (1) \\ & \frac{1}{1-x^2} \quad (2) \\ & \frac{1}{(1-x)^2} \quad (3) \\ & \frac{1}{(1-x)^3} \quad (4) \end{aligned}$$

۵۰- تابع مولد دنباله $\binom{n-1}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots$ کدام است؟
 $\widetilde{a}_0$ $\widetilde{a}_1$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = n$$

روش تستی:

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1 = n$$

$$\frac{1}{1-x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-x^n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} \quad (4) \checkmark$$

فرمول:

$$f^{(m)}(0) = m! \times a_m$$