موسسه بابان

انتشارات بابان و انتشارات راهیان ارشد

درس و کنکور ارشد

ریاضیات گسسته

(گراف‌ها)

ویژه‌ی داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد مهندسی کامپیوتر، IT و علوم کامپیوتر

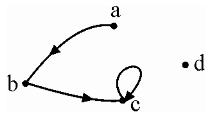
براساس کتب مرجع

رالف. پ. گریمالدی و کنت. اچ. روزن

ابوالفضل گیلک

۸ گراف‌ها

هر گراف مانند G از مجموعه‌ای از نقاط که به آن‌ها رئوس (Vertices) یا گره‌ها (nodes) می‌گوییم به همراه مجموعه‌ای از یال‌ها (Edges) که بین برخی از رئوس اتصالاتی ایجاد می‌کنند تشکیل می‌شود. هر یال را می‌توان با یک زوج مرتب نشان داد. برای مثال به گراف زیر توجه کنید:



شکل (۱) گراف G

در این گراف، مجموعه‌ی رئوس یک مجموعه‌ی 4 عضوی به صورت $V=\{a,b,c,d\}$ است و مجموعه‌ی یال‌ها را به صورت $E=\{(a,b),(b,c),(c,c)\}$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که یال‌های این گراف جهت‌دار هستند به همین دلیل $(a,b)\in E$ اما $(b,a)\notin E$.

یالی مانند (c,c) را که از یک رأس به خودش رسم می‌شود، طوق می‌نامند. برای هرکدام از رئوس، تعداد یال‌های خروجی را درجه‌ی خروجی و تعداد یال‌های ورودی را درجه‌ی ورودی می‌نامیم. برای رأس a داریم:

$$\text{a درجه‌ی ورودی} = \deg^{-}(a)=0$$

$$\text{a درجه‌ی خروجی} = \deg^{+}(a)=1$$

برای گراف G می‌توان ماتریسی به نام ماتریس همسایگی (مجاورت) تشکیل داد که هر سطر و ستون آن نماینده‌ی یک رأس از گراف باشد و درایه‌های ماتریس نشان‌دهنده‌ی یال‌های موجود در گراف باشند. برای گراف شکل (۱) ماتریس مجاورت به این صورت است:

$$A=\begin{array}{c}\\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

از آنجا که در این گراف جهت‌دار، فقط یال‌های (a,b) و (b,c) و (c,c) وجود دارند، در ماتریس مجاورت فقط همین درایه‌ها مقدار 1 دارند و سایر درایه‌ها 0 هستند.

توجه کنید که:

– مجموع هر سطر از ماتریس مجاورت، درجه‌ی خروجی آن رأس را نشان می‌دهد.

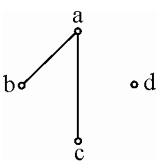
– مجموع هر ستون از ماتریس مجاورت، درجه‌ی ورودی آن رأس را نشان می‌دهد.

– نامتقارن بودن ماتریس A نشان می‌دهد که گراف G جهت‌دار بوده است. مثلاً درایه‌ی (a,b) برابر 1 است اما درایه‌ی (b,a) برابر با صفر است.

گراف‌های ساده (simple)

در اغلب کاربردهای گراف، ما با گراف‌های ساده روبه‌رو هستیم. گراف ساده گرافی است که یال‌های آن جهت‌دار نیستند (یعنی همه یال‌ها دو طرفه هستند) در ضمن طوق هم ندارد. علاوه بر این دو شرط، در ترسیم گراف ساده، یال مضاعف نباید به کار رفته باشد. یعنی اگر یالی بین دو رأس a و b وجود دارد، نباید آن را به صورت  نشان بدهیم بلکه رسم یک یال کافی است:

گراف G در شکل (۲) یک گراف ساده است:



شکل (۲)

در این گراف مجموعه‌ی رئوس برابر است با: $V = \{a,b,c,d\}$

مجموعه‌ی یال‌ها، یک مجموعه‌ی متقارن از زوج مرتب‌هاست:

$$E = \{(a,b)\ ,\ (b,a)\ ,\ (a,c)\ ,\ (c,a)\}$$

ماتریس مجاورت گراف G یک ماتریس متقارن است:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

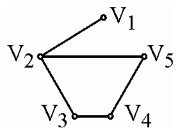
با اندکی دقت به ماتریس A متوجه موارد زیر خواهیم شد:

– ماتریس A متقارن است زیرا گراف G غیرجهت‌دار است.

– قطر اصلی ماتریس A همگی برابر با 0 هستند زیرا گراف G طوق ندارد.
– در گراف ساده‌ی G، درجه‌ی ورودی هر رأس با درجه‌ی خروجی آن برابر است و در نتیجه برای هر رأس (مثلاً a) مجموع درایه‌های روی سطر با مجموع درایه‌های روی ستون مربوط به آن رأس برابر است.
در گراف ساده‌ی شکل (۲) درجات رئوس به این ترتیب است:

$$\deg(a)=2\ \ ,\ \deg(b)=1\ ,\ \deg(c)=1\ ,\ \deg(d)=0$$

رأس d را که دارای درجه‌ی صفر است، یک رأس تنها (Isolated) می‌نامیم.
قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین درجات گراف ساده با تعداد یال‌های آن را نشان می‌دهد.
قضیه: در هر گراف ساده، مجموع درجات همه‌ی رئوس، برابر است با 2 برابر تعداد یال‌ها.
اثبات این قضیه بسیار ساده است. هر یال که به گراف اضافه می‌شود، یک درجه بـه هرکـدام از دو سر آن اضافه می‌شود پس هر یال، 2 درجه به مجموع کل درجات گراف اضافه می‌کند.
برای مثال گراف ساده‌ی شکل (۳) را در نظر بگیرید.



شکل (۳)

$$\text{مجموع درجات همه رئوس} = \sum_{i=1}^{5}\deg(V_i)=1+3+2+2+2=10$$

$$\Rightarrow \text{تعداد یال‌ها} = e=\frac{10}{2}=5$$

تعداد کل یال‌ها را معمولاً با $e=|E|$ نشان می‌دهیم. قضیه بالا به این صورت فرمول‌بندی می‌شود:

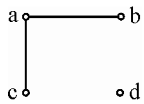
$$\boxed{\sum_{V_i\in V}\deg(V_i)=2e}$$

نتیجه: در هر گراف ساده، مجموع درجات همه‌ی رئوس همواره باید عددی زوج باشد، بـه همـین دلیل تعداد رئوسی که درجه فرد دارند، باید زوج باشد.
به عنوان مثال، هیچ گراف ساده‌ای وجود ندارد که دارای 4 رأس با درجات 3,1,1,0 باشد. (سـعی کنید رسم کنید). در واقع چون تعـداد درجـات فـرد، عـددی فـرد اسـت، ایـن دنبالـه‌ی درجـات، نمی‌تواند مربوط به یک گراف ساده باشد.

دنباله‌های گرافی (ترسیمی)

دنباله‌ی $d_1,d_2,...,d_n$ را یک دنباله‌ی ترسیمی (گرافی) می‌گوییم هرگاه یک گراف ساده با n رأس

وجود داشته باشد کـه درجـات رئـوس آن همـین اعـداد $d_1,...,d_n$ باشـند. بـرای مثـال دنبالـه‌ی 2,1,1,0 ترسیمی است زیرا می‌توان گراف ساده‌ی زیر را رسـم کـرد کـه 4 رأس دارد و درجـات رئوس آن همین اعداد 2 و 1 و 1 و 0 هستند:



شکل (۴)

وقتی تعداد اعداد دنباله، کم باشد، خیلی راحت و فقط با یک تجسم ساده می‌توان فهمید که دنبالـه ترسیمی هست یا خیـر. مـثلاً 2 و 2 و 2 ترسـیمی هسـت (یـک مثلـث) همچنـین 1 و 1 و 1 و 1 ترسیمی هست (دو پاره خط جدا از هم). اما در مواردی که تعداد اعضای دنباله (n) زیـاد باشـد و d_iها اعداد بزرگتری باشند نیاز به یک الگوریتم داریم که مشخص کنـد کـدام دنبالـه‌هـا ترسـیمی هستند. این الگوریتم را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال: آیا دنباله‌ی زیر گرافی است؟

2,3,3,2,1,5

پاسخ:

– اگر تعداد فردها، فرد باشد، در همین آغاز کار مشخص می‌شود که دنباله ترسیمی نیست. در این مثال تعداد فردها زوج است پس باید بررسی را ادامه بدهیم.

– در گراف ساده‌ای که n رأس دارد، درجه‌ی هر رأس حداکثر می‌تواند $n-1$ باشد پس اگر یکـی از درجه‌ها بزرگتر یا مساوی n باشد از همان ابتدا مشخص می‌شود که دنبالـه ترسـیمی نیسـت. در این مثال $n=6$ است (تعداد اعداد، 6 تاست) و همه درجات کمتر از 6 هسـتند پـس ایـن اشـكال وجود ندارد و باید بررسی را ادامه بدهیم.

در هر مرحله از کار، هر کدام از دو اِشکال بالا به وجود آمد، مشخص می‌شود که دنبالـه داده شـده ترسیمی نیست و نیازی به ادامه‌ی الگوریتم نداریم. اکنون الگوریتم را آغاز می‌کنیم.

گام اول: اعداد داده شده را به شکل نزولی مرتب کنید.

5,3,3,2,2,1

گام دوم: بزرگترین عدد را که در ابتدای لیست قرار دارد، حذف کنیـد. در ضـمن چـون ایـن عـدد برابر با 5 است، از 5 عدد بعدی، هرکدام یک واحد کم کنید.

{اگر این عدد مثلاً برابر با 3 بود، از 3 عدد بعدی، هرکدام یک واحد کم می‌کردیم.}

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{5} & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

حالا دنباله‌ی ساده‌تر و کوتاه‌تر 2,2,1,1,0 را داریم.

به گام اول برمی‌گردیم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم:

$$\cancel{2}\quad \underbrace{2\quad 1}_{\downarrow}\quad 1\quad 0$$

$$\overline{1\quad 0}\quad 1\quad 0$$

هرگاه الگوریتم به دنباله‌ی ثابت صفر برسد، نشانه‌ی ترسیمی بودن دنباله‌ی داده شده است.
اگر بخواهیم برای این کار برنامه‌نویسی کنیم، دستورات مرتب‌سازی و حذف را آنقدر تکرار می‌کنیم که همه‌ی اعداد به صفر برسند یا یک عدد منفی به وجود آید.
اگر به دنباله ثابت صفر رسیدیم، نشانه‌ی ترسیمی بودن و اگر یک عدد منفی به وجود آمد، نشانه‌ی ترسیمی نبودن دنباله است.
الگوریتم فوق را الگوریتم (هاول – حکیمی) می‌نامند.

مثال: کدامیک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی درجات یک گراف ساده است؟

۱) $5,3,2,2,1$ ۲) $5,4,3,2,2,1$

۳) $4,4,3,2,1$ ۴) $3,3,2,1,1$

پاسخ: در گزینه‌ی (۱) تعداد کل رئوس (تعداد کل اعداد داده شده) برابر بـا $n=5$ اسـت بنـابراین وجود یک رأس از درجه‌ی $d_1=5$ نشان می‌دهد این دنباله ترسیمی نیست.
در گزینه (۲) تعداد درجات فرد، عددی فرد است پس این دنباله هم ترسیمی نیست. گزینـه (۳) را با استفاده از الگوریتم هاول – حکیمی بررسی می‌کنیم.

$4,4,3,2,1$

4 را حذف می‌کنیم و از 4 عدد بعدی هرکدام یک واحد کم می‌کنیم:

$3,2,1,0$

اکنون باید 3 را حذف کنیم و از 3 عدد بعدی هرکدام یک واحد کم کنیم. اما با این کـار بـه مقـدار منفی خواهیم رسید:

$1,0,-1$

پس این دنباله ترسیمی نیست.
اکنون گزینه (۴) را با استفاده از الگوریتم هاول – حکیمی بررسی می‌کنیم:

$3,3,2,1,1$

حذف کردن 3 و کم کردن یک واحد از 3 عدد بعدی:

$2,1,0,1$

مرتب کردن اعداد:

$2,1,1,0$

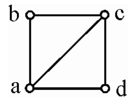
حذف 2 و کم کردن یک واحد از 2 عدد بعدی:

$0,0,0$

به دنباله‌ی ثابت صفر رسیدیم پس گزینه‌ی (۴) ترسیمی است.

چند مفهوم مقدماتی

گراف ساده‌ی G را در نظر بگیرید:



با استفاده از این گراف می‌خواهیم مفاهیم گشت، گذر، مسیر و دور را توضیح بدهیم.

گشت (walk): هر دنباله‌ی متناهی از رئوس مجاور را یک گشت می‌نامیم. در گشت، عبور از یال و رأس تکراری مجاز است. برای مثال a c a d c b یک گشت است.

گذر (trail): اگر در گشت، یال تکراری نداشته باشیم آن را یک گذر می‌نامیم. البته عبور از رأس تکراری مجاز است. برای مثال a d c a b یک گذر است. گذر بسته را یک مدار می‌نامیم.

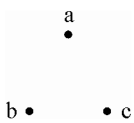
مسیر (path): اگر یک گذر، رأس تکراری نداشته باشد، آن را گذر ساده یا همان مسیر می‌نامیم. برای مثال a d c b یک مسیر به طول 3 است. مسیر به طول n دارای $n+1$ رأس است و آن را با علامت P_{n+1} نشان می‌دهیم.

دور (cycle): هر دنباله متناهی از رئوس مجاور که رأس تکراری نداشته باشد اما ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند را دور می‌نامیم. برای مثال a b c d a یک دور به طول 4 است. دور به طول n را C_n می‌نامیم.

گراف‌های ساده‌ی مشهور

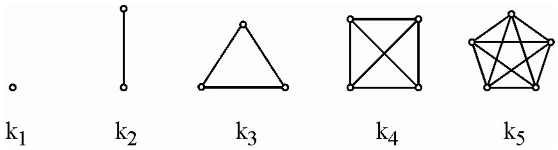
۱- گراف تهی (Empty):

گرافی که هیچ یالی نداشته باشد را گراف تهی می‌نامند. برای مثال شکل زیر یک گراف تهی با $n = 3$ رأس را نشان می‌دهد.

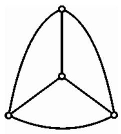


۲- گراف کامل (complete):

گراف ساده‌ی n رأسی را که در آن همه‌ی یال‌های ممکن وجود داشته باشند یک گراف کامل می‌نامند و با k_n نشان می‌دهند.



توجه داشته باشید که نحوه‌ی ترسیم گراف‌ها مهم نیست بلکه ویژگی‌های ریاضی آن مهم است. برای مثال گراف k_4 را می‌توان به صورت زیر هم رسم کرد:



k_4

در واقع هر گرافی که 4 رأس داشته باشد و همه رئوس به هم متصل باشند از نظر ما گراف k_4 است.

گراف‌های کامل دسته‌ی بسیار مهمی از گراف‌ها هستند و لازم است همه‌ی ویژگی‌های آن‌ها را به خوبی مطالعه کنید.

برای شروع، به یاد داشته باشید که گراف k_n دارای n رأس است، همه‌ی آن‌ها از درجه‌ی $n-1$ هستند در نتیجه تعداد یال‌های گراف k_n برابر است با:

$$e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = \frac{n(n-1)}{2}$$

همین استدلال را می‌توان به صورت دیگری انجام داد. گراف k_n دارای n رأس است و بین هر جفت از آن‌ها دقیقاً یک یال وجود دارد پس تعداد یال‌های گراف k_n برابر است با:

$$e = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

توجه: گفتیم که در گراف‌های غیرجهت‌دار، مجموع درجات همه‌ی رئوس، 2 برابر تعداد یال‌هاست:

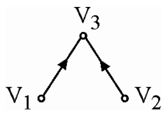
$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2e$$

حالا اگر گرافی جهت‌دار باشد، هر رأس دارای یک درجه ورودی $\deg^-(V_i)$ و یک درجه‌ی خروجی $\deg^+(V_i)$ است و حکم بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^-(V_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^+(V_i) = e$$

به عبارتی مجموع همه درجات ورودی، با مجموع همه درجات خروجی برابر است و هرکدام از آن‌ها می‌توانند تعداد یال‌ها را نشان بدهند. سوالی که در اینجا ممکن است مطرح شود آن است که آیا مجموع مربعات درجات ورودی نیز با مجموع مربعات درجات خروجی برابر است یا خیر؟

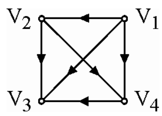
به عبارتی آیا تساوی $\sum_{i=1}^{n}(\deg^{-}(V_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(\deg^{+}(V_i))^2$ برقرار است؟
با بررسی چند مثال خیلی زود متوجه می‌شوید که این تساوی لزوماً برقرار نیست. مثلاً در شکل زیر:



$$\sum_{i=1}^{3}(\deg^{-}(V_i))^2=0+2^2+0=4$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\deg^{+}(V_i))^2=1^2+0+1^2=2$$

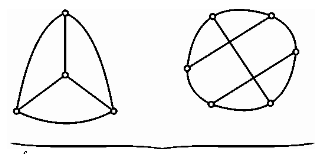
اما به یاد داشته باشید که در مورد یک گراف کامل (k_n) هرطور که یال‌های آن را جهت‌دار کنیم، تساوی بالا برقرار باقی خواهند ماند. گراف کامل جهت‌دار شده را k_n^* (تورنمنت) می‌نامند. نمونه زیر یک k_4^* است:



تحقیق کنید که تساوی فوق در مورد این گراف، برقرار است.

۳- گراف‌های m- منتظم (m-regular):

هر گراف ساده را که همه رئوس آن از درجه‌ی m باشند، یک گراف m- منتظم می‌نامیم. شکل زیر یک گراف 3- منتظم با $n=10$ رأس را نشان می‌دهد:



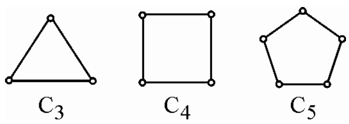
گراف 3- منتظم G با $n=10$ رأس

اگر به گراف‌های کامل توجه کنید می‌بینید که هر گراف k_n، یک گراف $(n-1)$- منتظم است. همچنین گراف تهی، گرافی 0- منتظم است.

سوال: آیا گرافی 3- منتظم با 9 رأس وجود دارد؟
پاسخ: اگر گرافی با $n=9$ رأس وجود داشته باشد که درجه‌ی هر کدام از آن‌ها $m=3$ باشد آنگاه مجموع درجات همه‌ی رئوس برابر با $nm=27$ است که برای گراف‌های ساده غیرممکن است زیرا مجموع درجات باید عددی زوج باشد. پس گراف 3- منتظم با 9 رأس وجود ندارد.
درواقع شرط وجود گراف m- منتظم با n رأس آن است که nm عددی زوج باشد و در ضمن $m\le n-1$ باشد.

۴- گراف‌های دوری (cycle):

گرافی که فقط از یک دور ساده به طول n تشکیل می‌شود را گراف دوری می‌نامیم و با C_n نشـان می‌دهیم. واضح است که برای تشکیل یک دور باید $n \geq 3$ باشد.

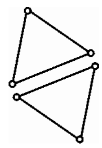


C_n دارای n رأس و n یال است و درجه همه رئوس آن برابر با 2 است.

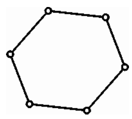
سوال: آیا هر گراف 2- منتظم یک گراف دوری (C_n) است؟

پاسخ: خیر – برای مثال فرض کنید G گرافی باشد دارای 6 رأس که درجه‌ی همه آن‌ها برابـر بـا 2 باشد. این گراف ممکن است همان C_6 باشد. (شکل سمت چپ)

همچنین ممکن است C_6 نباشد بلکه از دو قطعه که هرکدام C_3 هستند تشکیل شده باشد. (شکل سمت راست)



این گراف نیز 2- منتظم و دارای 6 رأس است.



C_6 گرافی 2- منتظم با 6 رأس است.

شکل (۶)

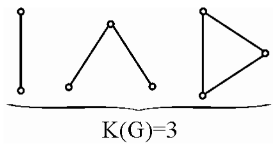
در اینجا لازم است با مفهوم همبندی گراف آشنا شویم.

تعریف: گراف G را همبند یا متصل (Connected) گوییم هرگـاه بـین هـر دو رأس متفـاوت در G مسیری (شامل یک یا چند یال) وجود داشته باشد.

هر گراف ناهمبند، از تعدادی گراف همبند تشکیل می‌شود که بـه هرکـدام از آن‌هـا یـک مولفـه‌ی همبندی G می‌گوییم.

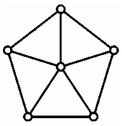
در شکل شماره‌ی (۶)، گراف سمت چپ گرافی همبند است و فقط یک مولفه دارد کـه همـان C_6 است. اما گراف سمت راست ناهمبند است و دو مولفه‌ی همبند دارد که هرکدام C_3 هستند.

در شکل زیر [شکل (۷)] گرافی ناهمبند را می‌بینید که از 3 قطعه‌ی همبند تشکیل شـده اسـت. در واقع دارای 3 مولفه‌ی همبندی است. تعداد مولفه‌های همبندی گراف G را با K(G) نشان می‌دهیم.



شکل (۷)

☜ **نکته** : هرگاه G گرافی 2– منتظم و همبند باشد آنگاه $G = C_n$ است که n تعداد رئوس G است.



W5

توجه: اگر به گراف C_n یک رأس درجه‌ی n اضافه کنید، گراف چرخشی (Wheel) به دست می‌آید که آن را W_n می‌نامیم.
این گراف دارای $n+1$ رأس و $2n$ یال است.

۵- درخت (Tree) و جنگل (Forest):

هر گراف همبند بدون دور را یک درخت می‌نامیم. اگر گرافی بدون دور باشد اما همبند نباشد، از چند مولفه‌ی همبند تشکیل شده که هر کدام از آن‌ها درخت هستند. چنین گرافی را یک جنگل می‌نامیم.
در شکل زیر G_1 یک درخت است اما G_2 یک جنگل است که از 2 درخت تشکیل شده است.

G_1 G_2

قضیه: فرض کنیم G گرافی با n رأس و e یال باشد. این گزاره‌ها با هم معادلند:
۱) گراف G یک درخت است.
۲) گراف G همبند و بدون دور است.
۳) گراف G همبند است و $e = n-1$.
۴) گراف G بدون دور است و $e = n-1$.

به طور خلاصه، از سه ویژگی همبند بودن، بدون دور بودن و $e = n-1$ اگر یک جفت از آن‌ها را داشته باشیم، سومی هم ثابت می‌شود و در ضمن معلوم می‌شود که گراف موردنظر یک درخت است.

نتیجه ۱: پیش از این دیدیم که در هر گراف ساده، $\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2e$ است.
بنابراین در مورد هر درخت با n رأس خواهیم داشت:

$$e = n-1 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2n-2}$$

نتیجه ۲: پیش از این گفتیم که در هر گراف همبند، بین هر دو رأس متفاوت از گراف، **حداقل** یک مسیر وجود دارد. حالا در مورد درخت‌ها از آنجا که دوری وجود ندارد، بین هر دو رأس متفاوت،

دقیقاً یک مسیر وجود دارد. بهمین دلیل تعداد کل مسیرها در یک درخت با n رأس برابر است با:

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

از طرفی مسیرهای به طول یک یعنی همان یال‌ها برابر با $e=n-1$ هستند. اگر تعداد یال‌ها را از تعداد کل مسیرها کم کنیم، تعداد مسیرهای با طول حداقل 2 به دست خواهد آمد:

تعداد کل مسیرها در درخت با n رأس $=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

تعداد مسیرهای با طول حداقل 2 در درختی با n رأس $=\binom{n}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

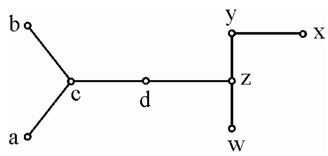
تعریف: در هر درخت، رئوس درجه‌ی یک را برگ‌ها یا رئوس معلق می‌نامیم. هر درخت نابدیهی حداقل دارای 2 برگ است. درخت بدیهی فقط یک رأس دارد.

توجه: رئوس غیربرگ را رأس میانی می‌نامیم. اگر m_i تعداد رأس‌های میانی درجه‌ی d_i باشد آنگاه تعداد برگ‌ها از رابطه‌ی $\ell=2+\sum m_i(d_i-2)$ به دست می‌آید.

در هر درخت، طول بزرگترین مسیر را قطر درخت (diameter) می‌نامیم. در واقع قطر درخت برابر است با بیشترین فاصله‌ی بین دو برگ آن.

مثال: گراف T یک درخت با $n=8$ رأس است.

T:



رئوس x، w، a و b برگ‌های این درخت هستند. قطر این درخت برابر با 5 است. در واقع طولانی‌ترین مسیر در این درخت دارای طول 5 است. (مثلاً فاصله‌ی a از x)

این درخت دارای $n=8$ رأس است بنابراین تعداد کل یال‌ها برابر با $e=n-1=7$ و تعداد کل مسیرها برابر با $\binom{8}{2}=28$ است.

اکنون به درخت T در مثال بالا توجه کنید. با حذف هرکدام از یال‌های این درخت، به یک گراف ناهمبند خواهید رسید. از طرفی با اضافه کردن هر یال جدید به این درخت، یک دور ایجاد خواهد شد، این ویژگی‌ها فقط در درخت‌ها دیده می‌شود به عبارتی قضیه زیر برقرار است:

قضیه: گزاره‌های زیر معادل هستند:

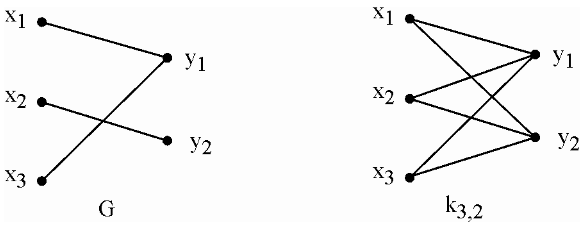
۱) G یک درخت با مجموعه‌ی رئوس V و مجموعه یال‌های E است.

۲) به ازای هر $a,b \in V$ اگر $(a,b) \in E$ باشد، با حذف این یال به یک گراف ناهمبند خواهیم رسید. $(a \neq b)$

۳) به ازای هر $a,b \in V$ اگر $(a,b) \notin E$ آنگاه با اضافه کردن یال (a,b) یک دور در گراف ایجاد می‌شود. $(a \neq b)$

۶- گراف دوبخشی:

گراف ساده‌ی G را دو بخشی گوییم هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های G را بتوان به دو بخش مجزای X و Y افراز کرد به گونه‌ای که اعضای X با هم مجاور نباشند، اعضای Y با هم مجاور نباشند و هر یال مانند $e=(x,y)$ بین $x \in X$ و $y \in Y$ باشد. گراف G یک گراف دوبخشی است:



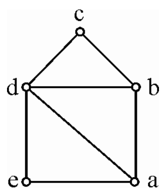
اگر $|X|=n$ و $|Y|=m$ و گراف دوبخشی دارای همه‌ی یال‌های ممکن بین X و Y باشد، آن را گراف دوبخشی کامل می‌نامیم و با $k_{n,m}$ یا $k_{m,n}$ نشان می‌دهیم. گراف $k_{n,m}$ دارای $e=nm$ یال است.

توجه: اگر G گرافی دوبخشی با N رأس باشد، حداکثر تعداد یال‌ها هنگامی به دست می‌آید که $n=m=\frac{N}{2}$ باشد یعنی $e \leq (\frac{N}{2})^2$.

البته اگر N فرد باشد، حداکثر تعداد یال‌ها $e \leq (\frac{N-1}{2})(\frac{N+1}{2})$ است.

گراف‌های اویلری

به گراف مقابل توجه کنید. آیا می‌توانید از نقطه‌ی a آغاز کنید، و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ، همه‌ی یال‌ها را رسم کنید، از هر یال دقیقاً یک بار عبور کنید و در نهایت به b برسید؟



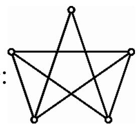
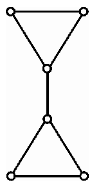
با کمی تأمل متوجه می‌شوید که این کار ممکن است. برای مثال، به ترتیب می‌توان از این رئوس عبور کرد:

a b c d e a d b

به چنین گذری، یک گذر اویلری می‌گویند. به نقطه‌ی d توجه کنید، درجه‌ی این رأس زوج است. به همین دلیل ما می توانستیم به ازای هر ورود به این نقطه، یک خروج هم داشته باشیم. درجه‌ی همه‌ی رئوس میانی این گذر باید زوج باشد زیرا هربار که به یکی از آن‌ها وارد می‌شویم باید بتوانیم از آن خارج شویم. اما درجه‌ی رئوس a و b که در ابتدا و انتهای گذر قرار دارند فرد است. در واقع در نقطه‌ی شروع، بدون آن که ورودی به a انجام داده باشیم، از آن خارج شده‌ایم. در نقطه‌ی b هم در آخرین مرحله یک ورود داشتیم بدون آنکه دیگر از این نقطه خارج شویم. با کمی دقت به توضیحات فوق متوجه حکم زیر می‌شوید.

حکم: گراف همبند و ساده‌ی G دارای یک گذر اویلری با ابتدا و انتهای a و b است اگر و تنها اگر درجه‌ی دو رأس a و b فرد باشد اما درجه ی سایر رئوس زوج باشد.

مثال: کدامیک از گراف‌های زیر دارای گذر اویلری است؟

۱) k_4 ۲) $k_{3,4}$ ۳) G:  ۴) H: 

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است.

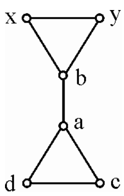
گراف k_4، دارای 4 رأس است که همه‌ی آن‌ها از درجه 3 (فرد) هستند پس گذر اویلری ندارد.

گراف $k_{3,4}$ دارای 4 رأس درجه 3 (فرد) و 3 رأس درجه 4 است پس گذر اویلری ندارد.

گراف G یک رأس درجه 2 و 4 رأس درجه 3 (فرد) دارد پس این گراف هم گذر اویلری ندارد.

اما در گراف H فقط دو رأس با درجه‌ی فرد داریم که می‌توانند ابتدا و انتهای گذر اویلری باشند.

یکی از گذرهای اویلری در این گراف به صورت a c d a b y x b است.



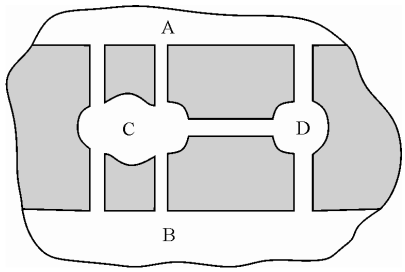
اکنون فرض کنید می‌خواهیم از نقطه‌ای مانند a آغاز کنیم، همه‌ی یال‌ها را طی کنیم، از هر یال دقیقاً یک بار بگذریم، و در نهایت به همان رأس a بازگردیم. اگر این کار ممکن باشد، می‌گوییم گراف G دارای مدار اویلری است.

هرگاه گراف G دارای مدار اویلری باشد، آن را اصطلاحاً "اویلری" می‌نامیم.

اگر به توضیحاتی که در مورد درجات رئوس در یک گذر اویلری دادیم، توجه کنید متوجه می‌شوید که در یک مدار اویلری، درجه‌ی همه‌ی رئوس باید زوج باشد زیرا چه در ابتدا و انتهای مدار و چه در رئوس میانی آن، به ازای هر بار ورود، یک بار خروج داریم.

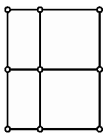
نتیجه: گراف همبند و ساده‌ی G اویلری است، (مدار اویلری دارد) اگر و تنها اگـر درجـه‌ی همـه‌ی رئوس آن زوج باشد.

مثال: (پل‌های کونیگسبرگ)



در شهر کونیگسبرگ، هفت پل دو طرف رودخانه و دو جزیره‌ی کوچک را به هم متصل مـی‌کننـد. اویلر به همراه نامزدش در حال گردش روی این پل‌ها بود. او به این فکـر افتـاد کـه از یـک نقطـه شروع کند، همه‌ی پل‌ها را طی کند، از هر پل دقیقاً یک بار بگذرد و در پایـان بـه نقطـه‌ی اول بـاز گردد. آیا این فکر عملی است؟

پاسخ: مسیرهای پیاده‌روی را به صورت یک گراف در نظر می‌گیریم:



این گراف دارای 4 رأس با درجه‌ی فرد است، بنابراین مدار اویلری ندارد و ایده‌ی آقای اویلر قابل اجرا نیست.

توجه:

– برای هر $n \geq 3$، دور ساده‌ی C_n اویلری است زیرا درجه‌ی همه رئوس آن 2 است.

– گراف K_{2m+1} اویلری است زیرا درجه‌ی هر رأس آن 2m است. اما K_{2m} اویلری نیست.

– گراف کامل دو بخشی $K_{n,m}$ به شرطی اویلری است که n و m هر دو زوج باشند.

برای مثال k_5 اویلری است امـا k_6 اویلـری نیسـت. $k_{3,5}$ و $k_{4,5}$ اویلـری نیسـتند امـا $k_{4,6}$ اویلری است.

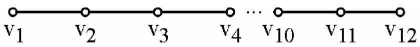
مثال: درخت T گذر اویلری دارد و دارای 12 رأس است. این درخت چند مسیر به طول 3 دارد؟

۱) بستگی به درجه‌ی رئوس میانی دارد. ۲) حداقل 4 و حداکثر 7.

۳) 9 مسیر به طول 3 دارد. ۴) 8 مسیر به طول 3 دارد.

پاسخ: درخت T فاقد دور است بنابراین قطعاً مدار اویلری ندارد. اما طبق فرض دارای گذر اویلری است. بنابراین دقیقاً دارای دو رأس درجه‌ی فرد است.

از طرفی می‌دانیم که T حداقل دارای 2 برگ (رأس درجه یک) است. با در نظر گرفتن دو جملـه‌ی قبل، نتیجه می‌گیریم که T دقیقاً دارای 2 برگ است به عبارتی T یک مسیر ساده با 12 رأس اسـت. یعنی $T = P_{12}$.



تعداد مسیرهای به طول 3 در این درخت برابر است با 9 است.

به طول کلی تعداد مسیرهای به طول k در یک مسیر ساده‌ی P_n برابر با $n-k$ است.

گذر اویلری و مدار اویلری در گراف‌های جهت‌دار

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه که گراف همبند جهت‌دار G دارای گذر اویلری با شروع از رأس a و انتها در رأس b باشد آن است که:

در رأس ابتدایی، درجه‌ی خروجی، یک واحد بیشتر از ورودی باشد:

$$\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$$

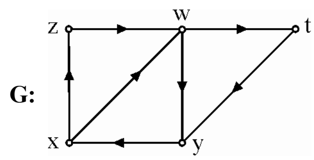
در رأس انتهایی، درجه‌ی ورودی یک واحد بیشتر از خروجی باشد:

$$\deg^-(b) = \deg^+(b) + 1$$

و در سایر رئوس درجه‌ی ورودی و خروجی برابر باشد:

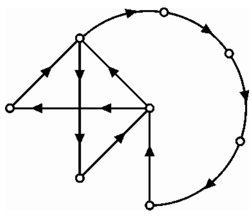
$$\deg^+(v) = \deg^-(v)$$

مثال: در گراف جهت‌دار G، درجه‌ی خروجی x، یک واحد بیشتر از درجه ورودی آن است. درجه ورودی y یک واحد بیشتر از درجه خروجی آن است و سایر رئوس، درجات ورودی و خروجی برابری دارند. بنابراین یک گذر اویلری با شروع از x و انتها در y وجود دارد.



قضیه: گراف همبند و جهت‌دار G دارای مدار اویلری است اگر و تنها اگر در هر رأس v داشته باشیم $\deg^+(v) = \deg^-(v)$.

مثال: همه‌ی رئوس گراف جهت‌دار G دارای درجات ورودی و خروجی برابری هستند پس G دارای مدار اویلری است.

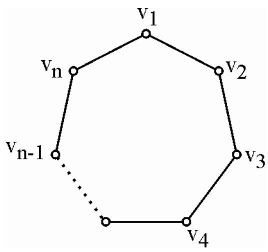


گراف‌های همیلتونی

گراف همبند و ساده‌ی G را در نظر بگیریم. یک مسیر همیلتونی، مسیری است که از رأسی مانند a

آغاز شود، از هر رأس دقیقاً یک بار عبور کند و در نهایت به رأس دیگری مانند b ختم شود. به بیان دیگر، مسیر همیلتونی همه رئوس را دقیقاً یک بار ملاقات می‌کند. البته نیازی نیست که از همه یال‌ها عبور کرده باشد.
دور همیلتونی به صورت مشابه تعریف می‌شود با این تفاوت که از a آغاز کرده و به a برمی‌گردد.
گراف G را همیلتونی گوییم هرگاه دارای یک دور همیلتونی باشد.

مثال: در دور C_n (شکل زیر) مسیر $v_1 v_2 ... v_{n-1}$ یک مسیر همیلتونی است و اگر یال $v_n v_1$ را هم به آن اضافه کنیم، دور $v_1 v_2 ... v_{n-1} v_n$ یک دور همیلتونی است.



اگر گراف G دارای دور همیلتونی باشد، با حذف آخرین یال به یک مسیر همیلتونی خواهیم رسید.

روش بررسی همیلتونی بودن یک گراف

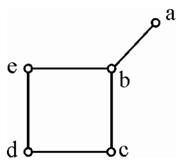
هیچ شرط لازم و کافی که با تکیه بر آن بتوانیم گراف‌های همیلتونی و غیرهمیلتونی را تشخیص دهیم وجود ندارد. با این حال با به خاطر سپردن چند نکته و استفاده از چند قضیه‌ی یک طرفه می‌توان در هر مثال، پی به همیلتونی بودن یا نبودن گراف برد.

الف: گراف‌های کامل k_n $(n \geq 3)$ همه همیلتونی هستند.

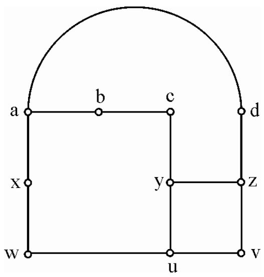
در ادامه نشان می‌دهیم که در گراف k_n، تعداد دورهای به طول m از رابطه‌ی $\binom{n}{m}\frac{(m-1)!}{2}$ به دست می‌آید. دورهای همیلتونی، دورهایی به طول $m = n$ هستند بنابراین تعداد دورهای همیلتونی k_n برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است.

ب: گراف دو بخشی کامل $k_{n,m}$ فقط در صورتی همیلتونی است که $n = m$ باشد. گراف $k_{n,n}$ همیلتونی است و تعداد دورهای همیلتونی آن برابر با $\frac{n!(n-1)!}{2}$ است.

ج: هر گرافی که دارای برگ (رأس درجه یک) باشد، همیلتونی نیست یعنی دور همیلتونی ندارد. البته چنین گرافی ممکن است مسیر همیلتونی داشته باشد اما دور همیلتونی ندارد. مثلاً در گراف زیر، مسیر همیلتونی a b c d e وجود دارد اما هیچ دور همیلتونی وجود ندارد پس این گراف همیلتونی نیست.

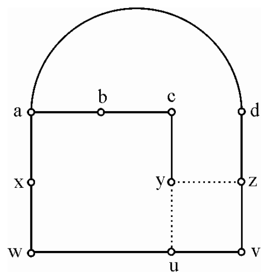


د: هر دور همیلتونی، به فرض وجود، باید از یال‌های مرتبط با رئوس درجه 2 عبور کند. به عبارت دیگر اگر در گراف G، رأس v با درجه 2 وجود داشته باشد، دور همیلتونی G ، باید شامل یال‌هایی که با v در تماس هستند باشد.
ما از این نکته برای پیدا کردن دور همیلتونی G یا تشخیص عدم وجود آن، استفاده می‌کنیم. به دو مثال زیر توجه کنید.



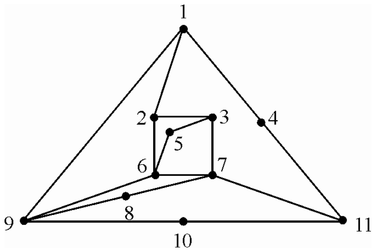
مثال: کدام گزینه در مورد گراف G صحیح است؟
۱) G اویلری است اما همیلتونی نیست.
۲) G همیلتونی است اما اویلری نیست.
۳) G اویلری و همیلتونی است.
۴) G نه اویلری است و نه همیلتونی

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است.
تشخیص اویلری بودن ساده است. برای اویلری بودن باید گراف G همبند باشد و درجه همه‌ی رئوس آن زوج باشد. رئوس a و y و z و u درجه‌ی فرد دارند پس G اویلری نیست.
(در ضمن G حتی گذر اویلری هم ندارد زیرا برای وجود گذر اویلری باید دقیقاً دو رأس با درجه‌ی فرد داشته باشیم).
تشخیص همیلتونی بودن یا نبودن G قدری مشکل‌تر است. چون هیچ شرط لازم و کافی در این مورد نداریم.



در گراف G چند رأس با درجه 2 مشاهده می‌شود: x و w و v و d و c و b رئوس درجه 2 هستند. برای هرکدام از این رئوس، یال‌های مرتبط با رأس را پررنگ کنیم:
اگر مدار همیلتونی وجود داشته باشد، لزوماً باید یال‌های مشخص شده را داشته باشد. سایر یال‌ها را هم می‌توان به دلخواه برای تکمیل مدار به آن اضافه کرد.
با این حال مشخص است که یال‌های پررنگ شده تشکیل یک مدار همیلتونی نمی‌دهند و اضافه کردن یال‌های yz یا yu به آن هم مشکل را حل نمی‌کند زیرا در رأس a یک سه راهی ایجاد شده است در حالی که در یک مدار، درجه‌ی هر رأس باید 2 باشد.
پس گراف G مدار همیلتونی ندارد در نتیجه همیلتونی نیست.

مثال: رئوس گراف G، مجموعه اعداد $V=\{1,2,...,11\}$ هستند و یال‌های آن در شکل مشخص شده‌اند. کدام گزینه صحیح است؟



۱) G اویلری نیست، همیلتونی هست و دو مدار همیلتونی دارد.

۲) G اویلری نیست، همیلتونی هست و دقیقاً یک مدار همیلتونی دارد.

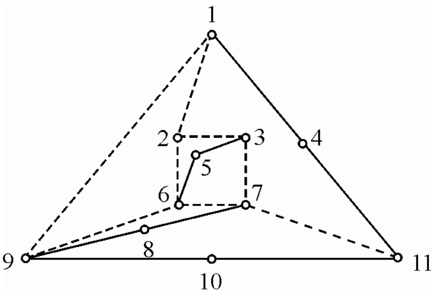
۳) G اویلری است اما همیلتونی نیست.

۴) G نه اویلری است و نه همیلتونی.

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

در گراف G رئوسی با درجه‌ی فرد وجود دارد بنابراین اویلری نیست. حالا می‌خواهیم وجود یا عدم وجود دور همیلتونی را بررسی کنیم. رئوس شماره‌ی 4 و 10 و 8 و 5 دارای درجه 2 هستند. یال‌های مرتبط با این رئوس را پررنگ می‌کنیم:

تا اینجا می‌دانیم که مسیر $7-8-9\to10\to11\to4\to1$ قطعه‌ای اجباری از دور همیلتونی است.



همچنین یال‌های مرتبط با رأس 5 هم حتماً بخشی از این دور هستند.

حالا با اضافه کردن برخی از یال‌های دیگر باید این دور را تکمیل کنیم. این دور را به دو صورت می‌توان تکمیل کرد.

روش اول: اضافه کردن یال‌های $3\to7$ و $2\to6$ و $1\to2$

روش دوم: اضافه کردن یال‌های $6\to7$ و $2\to3$ و $1\to2$

بنابراین گراف G همیلتونی است و دارای 2 دور همیلتونی است.

هـ : تشخیص همیلتونی بودن با توجه به درجه‌ی رئوس

کوچکترین دور حداقل به 3 رأس نیاز دارد. به همین دلیل است که همه‌ی قضایا و نتایج این بخش

با شرط $n \geq 3$ مطرح می‌شوند.
ابتدا یادآوری می‌کنیم که گراف کامل $(n \geq 3)k_n$ همیلتونی است. اکنون گراف همبند و ساده‌ی G را در نظر بگیرید. اگر رئوس u و v مجاور نیستند اما مجموع درجات آن‌ها بزرگتر یا مساوی n است، می‌توانید آن‌ها را با یال $e = uv$ به یکدیگر متصل کنید. اکنون گراف جدیدی دارید. دوباره به رئوس غیرمجاور توجه کنید و اگر یک جفت از آن‌ها پیدا کردید که مجموع درجات آن‌ها بزرگتر یا مساوی n است، دوباره آن‌ها را با یک یال جدید به هم متصل کنید، با ادامه‌ی این روند، اگر متوجه شدید که به گراف کامل می‌رسید، نتیجه می‌شود که گراف اولیه یعنی G همیلتونی بوده.
مطابق توضیح بالا دو نتیجه زیر را می‌توان گرفت:
الف: اگر در گراف ساده G با $n \geq 3$ رأس، به ازای هر جفت u و v از رئوس غیرمجاور داشته باشیم: $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ آنگاه G همیلتونی است.

ب: در گراف ساده‌ی G با $n \geq 3$ رأس، اگر برای هر رأس مانند u داشته باشیم $\deg(u) \geq \frac{n}{2}$ آنگاه G همیلتونی است.
بدیهی است که حکم (ب) یک حالت خاص از حکم (الف) است.

توجه: احکام زیر نیز با استفاده از توضیحات فوق و استفاده از این حقیقت که گراف کامل همیلتونی است ثابت می‌شوند:
ج: در گراف ساده G با حداقل 3 رأس، اگر برای هر جفت u و v از رئوس داشته باشیم $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$ آنگاه G مسیر همیلتونی دارد.
د: در گراف ساده G با حداقل 3 رأس، اگر $2e-4 \geq (n-1)(n-2)$ آنگاه G همیلتونی است. در واقع این نامساوی بیان می‌کند که $e \geq \binom{n-1}{2} + 2$ است.

رنگ‌آمیزی گراف‌ها

در این بخش، بیشتر تمرکز ما بر روی رنگ‌آمیزی رأسی گراف‌ها است. یک رنگ‌آمیزی استاندارد برای گراف ساده‌ی G یعنی رنگ‌آمیزی رئوس گراف، با رعایت این شرط که رئوس مجاور، غیرهمرنگ باشند. یادآوری می‌کنیم که دو رأس a و b را مجاور گویند اگر با یال (a,b) به هم متصل شده باشند.
در اینجا دو سوال مهم مطرح می‌شود که باید به تفاوت آن‌ها توجه کنید.

مسأله اول: برای رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف G، حداقل به چند رنگ نیاز داریم؟
پاسخ این مسأله را عدد رنگی (کروماتیک) گراف G می‌نامند و آن را با $X(G)$ نشان می‌دهند.

مسأله دوم: حالا فرض کنید به تعداد کافی رنگ‌های مختلف در اختیار داریم. برای مثال فرض کنید λ رنگ مختلف را در اختیار داریم. به چند حالت می‌توان رنگ‌آمیزی رأس‌ها را انجام دهیم. پاسخ

این مسأله را چند جمله‌ای رنگی گراف G می‌نامند و معمولاً آن را بـا $P_G(\lambda)$ یـا $P(G,\lambda)$ نشـان می‌دهند.

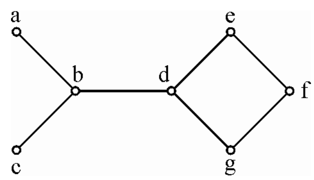
ابتدا عدد رنگی و چند ویژگی مهم آن را بررسی می‌کنیم:

عدد رنگی یک گراف

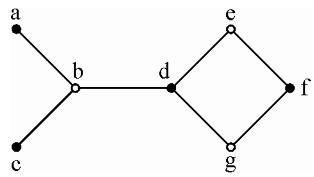
تشخیص عدد رنگی یک گراف، کار ساده‌ای است. کافیست از رأس دلخواهی مانند v_1 آغاز کنیم، مثلاً رنگ آبی را برای v_1 انتخاب می‌کنیم. سپس به سراغ رئوس مجاور با v_1 می‌رویم. برای آن‌ها حق نداریم از رنگ آبی استفاده کنیم. برای مثال از رنگ قرمز استفاده مـی‌کنـیم. بـه همـین ترتیـب ادامه می‌دهیم تا کار رنگ‌آمیزی رأس‌ها به پایـان برسـد. البتـه از آنجـا کـه عـدد رنگـی گـراف را می‌خواهیم. سعی می‌کنیم تا حد امکان از رنگ جدیدی استفاده نکنیم مگر آنکه ناچار شویم.

در پایان کار، حداقل تعداد رنگ‌هایی که ناچار به استفاده از آن‌ها شدیم، عـدد رنگـی گـراف G را مشخص می‌کند.

مثال: عدد رنگی گراف G کدام است؟



پاسخ: رنگ‌آمیزی را از رأس a آغاز می‌کنیم. برای رأس a از رنگ آبی استفاده می‌کنیم. بـرای رأس b که مجاور با a است ناچاریم از رنگ دیگری مانند قرمز استفاده کنیم.



اما برای d و c که هیچکدام مجاور a و مجاور یکدیگر نیستند دوباره از رنگ آبی استفاده می‌کنـیم. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و در نهایت می‌بینیم که فقط با استفاده از 2 رنگ مـی‌تـوانیم همـه‌ی رئوس را رنگ‌آمیزی کنیم. بنابراین عدد رنگی گراف برابر با 2 است: $X(G) = 2$.

قضیه: گزاره‌های زیر باهم معادل هستند: (G را گرافی غیربدیهی در نظر بگیرید.)

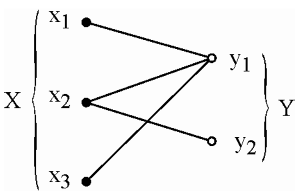
۱) گراف G دو بخشی است.

۲) عدد رنگی گراف G برابر با 2 است.

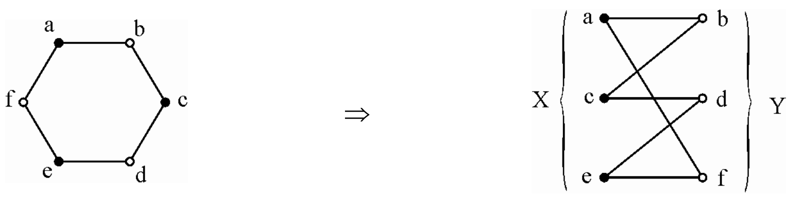
۳) گراف G هیچ دوری به طول فرد ندارد.

معادل بودن گزاره‌های (۱) و (۲) تقریباً واضح است. اگر گراف G دو بخشی باشد، آنگاه رئوس G

را می‌توان به دو بخش X و Y افراز کرد که هیچکدام از اعضای X باهم مجاور نیستند و هیچکدام از اعضای Y نیز باهم مجاور نیستند. پس می‌توان مطابق شکل همه رئوس عضو X را با رنگ آبی و همه رئوس عضو Y را با رنگ قرمز رنگ‌آمیزی کرد و عدد رنگی گراف G برابر با 2 خواهد بود.



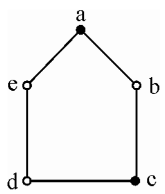
از سوی دیگر، اگر عدد رنگی گراف G برابر با 2 باشد. می‌توانیم همه رئوس را فقط با استفاده از 2 رنگ آبی و قرمز، رنگ‌آمیزی کنیم. حالا همه رئوس آبی رنگ را بخش X و همه رئوس قرمز رنگ را بخش Y تصور کنید. خواهید دید که گراف G دو بخشی است. در شکل زیر دوبخشی بودن C_6 را به همین روش نشان داده‌ایم:



رئوس آبی و قرمز بخش‌های گراف را مشخص می‌کنند.

عدد رنگی C_6 برابر با 2 است.

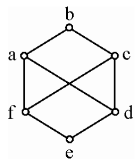
در مورد گزاره‌ی (۳) به این مطلب توجه کنید که هر دور به طول زوج را می توان با 2 رنگ رنگ‌آمیزی کرد (مانند C_6 در شکل بالا). اما برای رنگ‌آمیزی C_3 یا C_5 یا C_7 حداقل به 3 رنگ مختلف نیاز پیدا می‌کنیم.

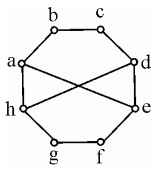


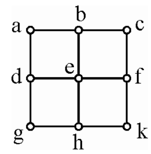
برای مثال در گراف C_5 اگر a را با رنگ آبی و b را با رنگ قرمز رنگ‌آمیزی کنیم، در ادامه می‌توان برای c، رنگ آبی و برای d رنگ قرمز را انتخاب کنیم اما در مورد e دیگر هیچکدام از رنگ‌های آبی و قرمز قابل استفاده نیست و نیاز به یک رنگ سوم داریم. پس عدد رنگی C_5 برابر با 3 است.

البته اثبات دقیق این مطلب، موردنظر ما نیست اما با توجه به توضیحات فوق، یکی از راه‌های اطمینان از دو بخشی بودن گراف، آن است که اطمینان پیدا کنیم در آن گراف، دوری با طول فرد وجود ندارد.

مثال: کدام گراف دو بخشی نیست؟

۱)


۲)


۳)


۴) درخت T با 9 رأس و 5 برگ

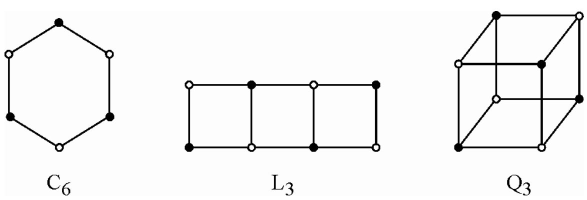
پاسخ: در گزینه‌ی (۱) همه‌ی دورها دارای طول زوج هستند. مثلاً a b c d e f a دوری به طول 6 و a b c f a دوری به طول 4 است. پس این گزینه، دو بخشی است و عدد رنگی آن هم برابر با 2 است.

در گزینه (۲) دور به طول فرد وجود دارد. مثلاً a b c d h a دوری به طول 5 است، پس این گزینه، دو بخشی نیست.

در گزینه (۳) همه دورهای موجود به وضوح دارای طول زوج هستند. پس این گراف هم دو بخشی است.

در مورد گزینه (۴) توجه کنید که درخت‌ها فاقد دور هستند پس در آن‌ها دوری با طول فرد وجود ندارد، همین مطلب نشان می‌دهد که همه‌ی درخت‌ها (و جنگل‌ها) دو بخشی هستند. (البته به جزء درخت بدیهی که فقط یک رأس دارد.)

توجه: در گراف‌های C_{2n} (دور ساده به طول زوج) و L_n (نردبانی با طول n) و Q_n (n − مکعب) دوری با طول فرد وجود ندارد. به همین دلیل عدد رنگی این گراف‌ها برابر با 2 است و همه آن‌ها دو بخشی هستند:



C_6 L_3 Q_3

نحوه‌ی رنگ‌آمیزی برخی از این گراف‌ها فقط با استفاده از 2 رنگ را در شکل فوق می‌بینید. در مورد Q_n می‌دانیم که این گراف دارای 2^n رأس است که هر کدام یک رشته‌ی n بیتی هستند. در واقع می‌توان مجموعه‌ی رئوس Q_n را به این صورت نوشت:

$$V(Q_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i = 0 \text{ یا } 1\}$$

حالا فرض کنیم X شامل رئوسی باشد که مجموع مولفه‌های آن‌ها زوج است و Y شامل رئوسی

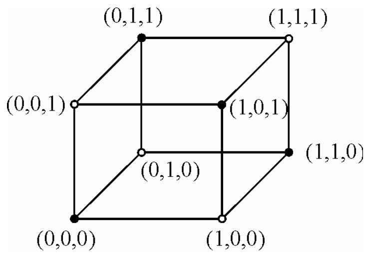
باشد که مجموع مولفه‌های آن‌ها فرد است:

$$X = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_i = 0 \text{ یا } 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = \text{زوج} \right\}$$

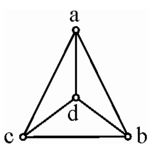
$$Y = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_i = 0 \text{ یا } 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = \text{فرد} \right\}$$

در این صورت X و Y دقیقاً بخش‌های گراف Q_n را نشان می‌دهند. می‌توان همه رئوس عضو X را به رنگ آبی و همه اعضای Y را به رنگ قرمز نسبت داد.

مثلاً در مورد Q_3 داریم:



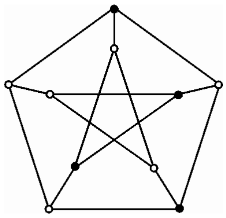
$$X = \{(0,0,0) \ , (1,1,0) \ , (1,0,1) \ , (0,1,1)\}$$
$$Y = \{(0,1,0) \ , (1,0,0) \ , (0,0,1) \ , (1,1,1)\}$$



توجه: عدد رنگی گراف k_n برابر با n است. این مطلب به سادگی قابل بررسی است. برای مثال در گراف k_4 (شکل مقابل) وقتی برای رأس a از رنگ آبی استفاده کنیم، دیگر حق استفاده از این رنگ را برای سایر رئـوس نداریم زیرا همه آن‌ها با a مجاور هستند.

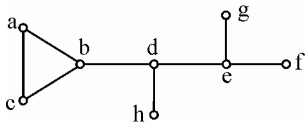
وقتی برای b از رنگ قرمز استفاده کنیم در ادامه حق استفاده از این رنگ را هم نـداریم و بـه ایـن ترتیب می‌بینید که ناچاریم برای هر رأس یک رنگ متفاوت را به کار بگیریم. پس عدد رنگـی k_4 برابر با 4 است. عدد رنگی k_5 هم برابر با 5 خواهد بود.

توجه: عدد رنگی گراف پترسن برابر با 3 است. بنابراین این گراف دو بخشی نیسـت. بـا کمـی دقت متوجه می‌شوید که این گراف شامل تعداد زیادی دور به طول فرد است.

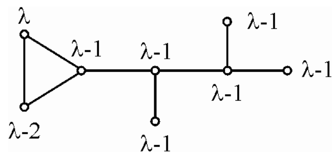


چند جمله‌ای رنگی

فرض کنید λ تعداد رنگ‌هایی که باشد که یک نقاش در اختیار دارد. [مثلاً اگر 5 رنگ مختلف داشته باشد $\lambda = 5$ است]. از این نقاش خواسته‌ایم که رئوس گراف مقابل را رنگ‌آمیزی کند. این رنگ‌آمیزی باید به صورت استاندارد باشد یعنی رئوس مجاور همرنگ نباشند.



تصور کنید که نحوه‌ی حرکت این نقاش همان ترتیب حروف انگلیسی باشد.
یعنی رنگ‌آمیزی را از رأس a آغاز می‌کند و سپس به ترتیب، به سراغ b , c , d , ... , h می‌رود.
برای رأس a ، λ انتخاب دارد. (مثلاً فرض کنید رنگ آبی را انتخاب می‌کند).
برای رأس b، از هر رنگی به جز رنگ آبی می‌تواند استفاده کند. پس $\lambda - 1$ انتخاب دارد. (مثلاً فرض کنید از رنگ قرمز استفاده می‌کند). هنگامی که نوبت به c می‌رسد، پیش از آن a و b رنگ‌آمیزی شده‌اند و c با هر دوی آن‌ها مجاور است. برای c می‌تواند از هر رنگی به جزء آبی و قرمز استفاده کند. پس $\lambda - 2$ انتخاب دارد. سپس نوبت به d می‌رسد. از هر رنگی به جزء رنگ قرمز که در b استفاده شد می‌تواند استفاده کند پس $\lambda - 1$ انتخاب دارد. (مثلاً از آبی استفاده می‌کند) برای e می‌تواند از هر رنگی به جز رنگی که در d به کاربرد استفاده کند پس $\lambda - 1$ انتخاب دارد. به این ترتیب ادامه می‌دهد و هر بار تعداد انتخاب‌های ممکن برای هر رأس را یادداشت می‌کند.



البته باید مراقب باشید که اعداد نوشته شده برای تعداد انتخاب‌ها، با توجه به ترتیب رنگ‌آمیزی رئوس به دست آمده است. اگر شما مثلاً رنگ‌آمیزی را از سمت راست آغاز کنید، ممکن است جای برخی از مقادیر تغییر کند اما حاصل‌ضرب نهایی که نشان‌دهنده‌ی تعداد کل حالات ممکن است، تغییری نمی‌کند. در پایان با ضرب این عوامل داریم:

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^6(\lambda-2)$$

این چند جمله‌ای را چند جمله‌ای رنگی گراف G می‌نامیم.

مثال: چند جمله‌ای رنگی گراف k_4 با کدام برابر است؟

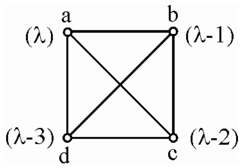
۱) ترکیب 4 شیء از λ شیء
۲) ترکیب $\lambda - 4$ شیء از λ شیء
۳) جایگشت 4 شیء از λ شیء
۴) جایگشت $\lambda - 4$ شیء از λ شیء

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

در شکل مقابل برای رنگ‌آمیزی رأس a، λ انتخاب داریم. سپس برای رنگ‌آمیزی b، هر رنگی بـه جزء رنگ استفاده شده در a را می‌توان به کار برد پس $\lambda-1$ انتخاب داریم. رأس c با هر دو رأس a و b مجاور است پس تعداد انتخاب‌ها برای این رأس، $\lambda-2$ خواهد بود. در پایان رأس d هم با همه رئوس قبلی مجاور است و برای آن $\lambda-3$ انتخاب خواهیم داشت.

با ضرب کردن تعداد انتخاب‌ها داریم:

$$P(k_4,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$



این چند جمله‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

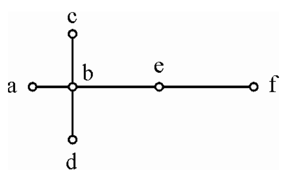
$$P(k_4,\lambda)=\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)....(1)}{(\lambda-4)(\lambda-5)...(1)}=\frac{\lambda!}{(\lambda-4)!}$$

این عبارت همان جایگشت 4 شیء از λ شیء است یعنی با $P(\lambda,4)$ برابر است.

نتیجه: چند جمله‌ای رنگی گراف کامل n رأسی (k_n) چنین است:

$$P(k_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)....(\lambda-n+1)=\frac{\lambda!}{(\lambda-n)!}$$

مثال: چند جمله‌ای رنگی درخت زیر کدام است؟



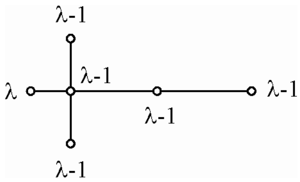
۱) $\lambda(\lambda-1)^5$

۲) $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

۳) $\lambda^2(\lambda-1)^4$

۴) $\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2$

پاسخ: اگر رنگ‌آمیزی را با رأس a آغاز کنیم و در ادامه با همـان ترتیـب حـروف انگلیسـی ادامـه دهیم، تعداد انتخاب‌ها برای هر رأس به این صورت است:



$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^5$$

توجه: چند جمله‌ای رنگی هر درخت T با n رأس به صورت $P(T,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که این حکم دو طرفه است. به عبارتی اگر چند جمله‌ای رنگی یک گراف به صورت $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن گراف یک درخت با n رأس بوده است.

نتیجه: اگر گراف G یک جنگل باشد که از k مولفه‌ی همبند تشکیل شده است و در مجموع n رأس دارد آنگاه چند جمله‌ای رنگی G به صورت $P(G,\lambda)=\lambda^k(\lambda-1)^{n-k}$ خواهد بود. عکس این مطلب هم برقرار است، به عبارتی اگر چند جمله‌ای رنگی یک گراف به شکل $\lambda^k(\lambda-1)^{n-k}$ باشد، آن گراف یک جنگل است که از k درخت مجزا تشکیل شده است، تعداد کل رئوس G برابر با n است و تعداد یال‌های G برابر با $n-k$ خواهد بود.

مثال: چند جمله‌ای رنگی گراف G به صورت $P_G(\lambda)=(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda)^5(\lambda-1)^{10}$ است. مقدار متوسط درجه‌ی رئوس در این گراف کدام است؟

۱) 1.5 ۲) 1.6 ۳) 2.5 ۴) 2.4

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است.

ابتدا با استفاده از تجزیه‌ی عبارات در چند جمله‌ای $P_G(\lambda)$ خواهیم داشت:

$$P_G(\lambda)=(\lambda(\lambda^2-2\lambda+1))^5(\lambda-1)^{10}=\lambda^5(\lambda-1)^{20}$$

دقت کنید که از اتحاد $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$ استفاده کرده‌ایم.

اکنون می‌بینیم که چند جمله‌ای رنگی گراف G به شکل $\lambda^5(\lambda-1)^{20}$ است بنابراین گراف G یک جنگل است که تعداد درختان تشکیل‌دهنده‌ی آن $k=5$ و تعداد یال‌های آن $n-k=20$ و تعداد کل رئوس آن $n=25$ است.

حالا یادآوری می‌کنیم که مجموع درجات تمام رئوس، با دو برابر تعداد یال‌ها برابر است، پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2e=2\times 20=40$$

بنابراین مقدار متوسط درجه‌ی رئوس به این صورت قابل محاسبه است:

$$\text{مقدار متوسط درجه رئوس}=\frac{\text{مجموع درجات}}{\text{تعداد رئوس}}=\frac{40}{25}=\frac{8}{5}=1/6$$

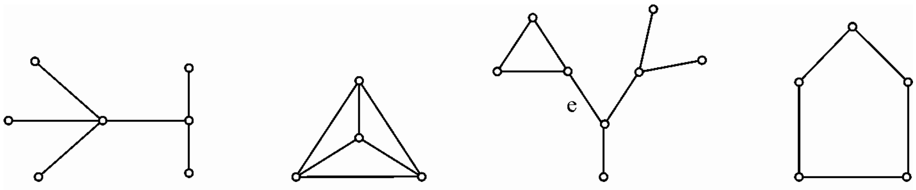
یک توضیح بسیار مهم:

در مثال‌های قبلی، برای یافتن چند جمله‌ای رنگی یک گراف، رنگ‌آمیزی رأس‌ها را از یک رأس دلخواه مانند a آغاز کردیم و سپس با حرکت به سمت رئوس مجاور، تعداد انتخاب‌ها برای هر رأس را یادداشت کرده و سپس مقادیر به دست آمده را در هم ضرب کردیم. در اینجا یک سوال مهم پیش می‌آید:

– آیا می‌توان چند جمله‌ای رنگی هر گراف را با شروع رنگ‌آمیزی از یک رأس دلخواه و سپس

ضرب کردن تعداد انتخاب‌ها برای هر رأس، محاسبه کرد؟
پاسخ: روش فوق، فقط در سه نوع از گراف‌ها قابل استفاده است:
اول: درخت‌ها و جنگل‌ها که فاقد دور هستند.
دوم: گراف‌های کامل
سوم: گراف‌هایی که از اتصال تعدادی درخت و گراف کامل به هم با استفاده از یال یا رأس **برشی** ساخته شده باشد.

یال برشی و رأس برشی به یال یا رأسی گفته می‌شود که با حذف آن، تعداد مولفه‌های همبندی گراف بیشتر شود. به عبارتی یال برشی به یالی می‌گوییم که اگر حذف شود، باعث ناهمبند شدن یک گراف همبند شود.
به گراف‌های زیر توجه کنید:



$G_1=T$ $G_2=k_4$ G_3 $G_4=C_5$

— گراف G_1 یک درخت است. می‌توان چند جمله‌ای رنگی آن را به سادگی با روش قبل به دست آورد و می‌دانیم که در نهایت $P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^6$ خواهد بود.

— گراف G_2 یک گراف کامل است. چند جمله‌ای رنگی آن به سادگی با روش قبل قابل محاسبه است و می‌دانیم که در نهایت $P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ خواهد بود.

— گراف G_3 درخت نیست زیرا شامل یک دور است. از طرفی گراف کامل هم نیست. اما اگر به ساختار آن دقت کنیم متوجه می‌شویم که از اتصال یک درخت و یک گراف کامل k_3 توسط یال برشی e به وجود آمده است. پس در این مورد هم می‌توانید از یک رأس دلخواه شروع به رنگ‌آمیزی کرده و تعداد انتخاب‌ها برای هر رأس را به سادگی مشخص کنید.
با انجام این کار خواهیم داشت:

$$P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^6(\lambda-2)$$

— اما گراف G_4 که همان دور ساده‌ی C_5 است. در هیچکدام از 3 دسته‌ی فوق قرار نمی‌گیرد. این گراف دارای دور است پس درخت نیست. از طرفی گراف کامل هم نیست. همچنین یال برشی هم ندارد. در چنین مواردی نمی‌توانیم از روش معمول و به سادگی ضابطه‌ی $P(\lambda)$ را تعیین کنیم. در چنین مواردی باید از قضیه‌ی زیر کمک بگیریم:

قضیه: فرض کنیم G یک گراف همبند ساده و a و b دو رأس مجاور آن باشند که با یال $e=ab$ به

هم متصل هستند. منظور از $G-e$ گرافی است که با حذف یال e به دست می‌آید و منظور از G.e گرافی است که با منطبق کردن رئوس a و b برهم به دست می‌آید. در این صورت چند جمله‌ای رنگی گراف G از معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$P(G,\lambda)=P(G-e,\lambda)-P(G.e,\lambda)$$

خلاصه اثبات:

در گراف $G-e$ رئوس a و b مجاور هم نیستند زیرا یال e را حذف کرده‌ایم. بنابراین $P(G-e,\lambda)$ تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی رئوس را نشان می‌دهد که در آن‌ها ممکن است a و b همرنگ یا غیرهمرنگ باشند.

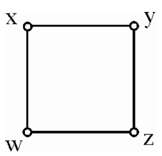
در گراف G.e، رئوس a و b بر هم منطبق هستند و در نتیجه $P(G.e,\lambda)$ تعداد حالات رنگ‌آمیزی را نشان می‌دهد که در آنها a و b قطعاً همرنگ خواهند بود.

به این ترتیب اگر از تعداد کل حالات، حالاتی را که در آن a و b همرنگ هستند کم کنیم، تعداد حالاتی به دست می‌آید که در آنها a و b غیرهمرنگ هستند. این‌ها دقیقاً همان حالاتی هستند که در رنگ‌آمیزی گراف G موردنظر ما هستند.

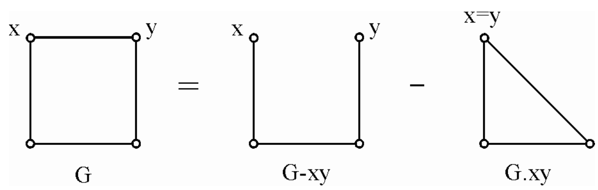
توضیح ۱: قضیه‌ی فوق برای همه انواع گراف‌های ساده قابل استفاده است، با این حال ما ترجیح می‌دهیم بدون استفاده از آن چند جمله‌ای رنگی را حساب کنیم. همانطور که گفتیم در مورد درخت‌ها، گراف‌های کامل و گراف‌هایی که ترکیب آن دو با یال برشی یا رأس برشی هستند، معمولاً نیازی به استفاده از این قضیه نداریم. اما در مورد گراف‌هایی مانند C_4 یا C_5 یا ... ناچار به استفاده از این قضیه هستیم.

توضیح ۲: در این قضیه، یال e می‌تواند هرکدام از یال‌های گراف باشد اما بهتر است یالی را انتخاب کنید که با حذف آن بتوانید چند جمله‌ای رنگی گراف G-e را به سادگی محاسبه کنید.

مثال: چند جمله‌ای رنگی گراف C_4 کدام است؟



پاسخ: یکی از یال‌های گراف را در نظر می‌گیریم. برای مثال یال $e=xy$ را انتخاب می‌کنیم. اکنون به 2 گراف توجه می‌کنیم. یکی گرافی که با حذف یال xy به دست می‌آید و دیگری گرافی که با منطبق کردن رأس y بر x به دست می‌آید. طبق قضیه‌ی فوق داریم:



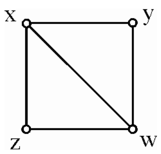
چند جمله‌ای رنگی هرکدام از این دو گراف، به سادگی نوشته می‌شود:

$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$\Rightarrow\ P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-(\lambda-2)\right]$$

با انجام محاسبات برای گراف $G=C_4$ داریم:

$$P(C_4,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)$$

مثال: چند جمله‌ای رنگی گراف G کدام است؟



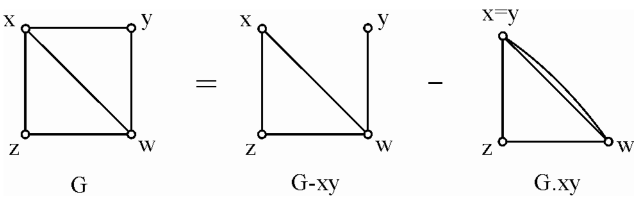
۱) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

۲) $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

۳) $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

۴) $\lambda(\lambda^2-1)(\lambda-3)$

پاسخ: گراف G یک درخت نیست زیرا شامل دور است. از طرفی گراف کامل هم نیست. پس باید از قضیه‌ی قبل برای یافتن $P(G,\lambda)$ استفاده کنیم. یال $e=xy$ را در نظر می‌گیریم. با حذف این یال، از گراف G به گراف $G-xy$ می‌رسیم که همان گراف کامل k_3 به همراه یک یال برشی است. اکنون با استفاده از قضیه‌ی قبل داریم:



چند جمله‌ای رنگی دو گراف به دست آمده، به سادگی قابل محاسبه است:

$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$\Rightarrow\ P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\left[\lambda-1-1\right]=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

مثال: کدام رابطه‌ی بازگشتی برای چند جمله‌ای رنگی گراف C_n صحیح است؟

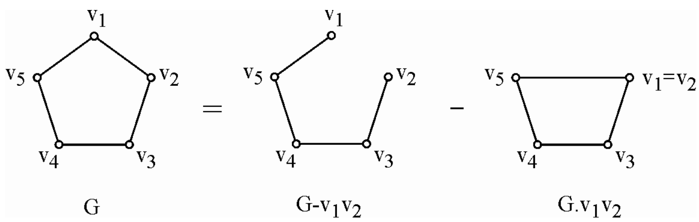
۱) $P(C_n,\lambda)=P(C_{n-1},\lambda)+P(C_{n-2},\lambda)$

۲) $P(C_n,\lambda)=\lambda P(C_{n-1},\lambda)+P(C_{n-2},\lambda)$

۳) $P(C_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}-P(C_{n-1},\lambda)$

۴) $P(C_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}+P(C_{n-1},\lambda)$

پاسخ: برای سادگی بیشتر در توضیح مطلب، ما حالت $n=5$ را در نظر می‌گیریم.
یال $e=v_1v_2$ از گراف C_5 را مدنظر قرار می‌دهیم. یک بار آن را حذف می‌کنیم و یک بار دو سر آن را بر هم منطبق می‌کنیم:



گراف $G-v_1v_2$ یک درخت با 5 رأس است و چند جمله‌ای رنگی آن به صورت $\lambda(\lambda-1)^4$ خواهد بود. گراف $G.v_1v_2$ همان C_4 است. به این ترتیب داریم:

$$P(C_5,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^4-P(C_4,\lambda)$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$$P(C_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}-P(C_{n-1},\lambda)$$

توجه: با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی به دست آمده برای $P(C_n,\lambda)$ می‌توانیم چند جمله‌ای رنگی گراف C_5,C_4 را پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که گراف C_3 همان گراف کامل k_3 است و برای آن داریم $P(C_3,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. حالا با استفاده از رابطه بازگشتی به ازای $n=4$ داریم:

$$P(C_4,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3-P(C_3,\lambda)$$
$$\Rightarrow P(C_4,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2-\lambda+2\right]$$
$$\Rightarrow P(C_4,\lambda)=\lambda(\lambda-1)\left[\lambda^2-\lambda+1\right]$$

توجه: رابطه‌ی بازگشتی زیر هم برای چند جمله‌ای رنگی گراف C_n به سادگی قابل اثبات است.

$$P(C_n,\lambda)=(\lambda-2)P(C_{n-1},\lambda)+(\lambda-1)P(C_{n-2},\lambda)$$

چند ویژگی جالب از چند جمله‌ای رنگی:

۱) درجه‌ی چند جمله‌ای رنگی همیشه برابر با تعداد رئوس G است: $\deg P(G,\lambda)=n=|V|$

۲) ضریب λ^n همواره برابر با یک است.

برای مثال چند جمله‌ای $P(\lambda)=3\lambda^4-2\lambda^2-2\lambda$ نمی‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد زیرا ضریب λ^4 برابر با 3 است.

۳) بدیهی است که اگر تعداد رنگ‌ها $\lambda=0$ باشد، هیچ راهی برای رنگ‌آمیزی رأس‌ها وجود ندارد. پس همیشه باید $P(0)=0$ باشد. به همین دلیل چند جمله‌ای رنگی نباید دارای جمله ثابت غیر صفر باشد. برای مثال چند جمله‌ای $P(\lambda)=\lambda^3-2\lambda+4$ نمی‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد.

در واقع همیشه باید بتوانیم از λ فاکتور بگیریم.

۴) اگر چند جمله‌ای رنگی گراف G را به صورت تجزیه شده بنویسیم، توان عامل λ نشان می‌دهد که این گراف دارای چند مولفه‌ی همبندی است. برای مثال اگر $P(G,\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ باشد، توان λ برابر با 3 است پس این گراف ناهمبند است و از 3 مولفه‌ی همبند تشکیل شده است.

۵) به جز گراف تهی (که هیچ یالی ندارد) که چند جمله‌ای رنگی آن به صورت $P(\lambda)=\lambda^n$ است، در سایر گراف‌ها حتماً عوامل λ و $(\lambda-1)$ در ضابطه‌ی $P(\lambda)$ حضور خواهند داشت. به همین دلیل وقتی گرافی لااقل یک یال داشته باشد، باید $P(1)=0$ باشد. به عبارتی مجموع همه‌ی ضرایب در چند جمله‌ای $P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda$ برابر با صفر است:

$$1+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1=0$$

۶) فرض کنیم عدد رنگی گراف G برابر با m باشد: $X(G)=m$.

در این صورت با داشتن $\lambda=0$ یا $\lambda=1$ یا ... ,$\lambda=m-1$ رنگ، هیچ راهی برای رنگ‌آمیزی گراف G وجود ندارد. اما با داشتن $\lambda=m$ رنگ یا داشتن تعداد بیشتری از رنگ‌ها، می‌توان گراف را رنگ‌آمیزی کرد. به عبارتی داریم:

$$P(0)=0\ ,\ P(1)=0\ ,\ .....\ ,\ P(m-1)=0$$

$$P(m)\neq 0\ ,\ P(m+1)\neq 0\ ,\ .....$$

در واقع می‌توان عدد رنگی گراف G را به این صورت معرفی کرد:

$$X(G)=\min\{k|P(G,k)\neq 0\ ,\ k\in W\}$$

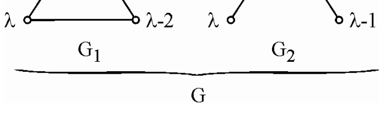
۷) وقتی چند جمله‌ای رنگی یک گراف را برحسب توان‌های نزولی λ مرتب می‌کنیم، همه‌ی توان‌های $\lambda^n,\lambda^{n-1},...,\lambda$ باید در آن حضور داشته باشند و در ضمن علامت ضرایب باید یکی در میان عوض شده باشد.

برای مثال چند جمله‌ای $\lambda^4-3\lambda^3-\lambda^2+\lambda$ نمی‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد. همچنین $\lambda^5-\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda$ نمی‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد زیرا λ^4 در آن حضور ندارد.

۸) اگر گراف G از دو مولفه‌ی همبندی G_1 و G_2 تشکیل شده باشد، واضح است که خواهیم داشت:

$$P(G,\lambda)=P(G_1,\lambda)P(G_2,\lambda)$$

برای مثال به چند جمله‌ای رنگی گراف زیر توجه کنید:



$$P(G,\lambda)=\underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}_{P(G_1,\lambda)}\ .\ \underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-1)}_{P(G_2,\lambda)}$$

رنگ‌آمیزی رأسی غیراستاندارد

حالت استاندارد رنگ‌آمیزی رئوس، با این شرط انجام می‌شود که رئوس مجاور، غیرهمرنگ باشند. برای مثال در گراف $a - b - c$ وقتی در a از رنگ آبـی اسـتفاده کـردیم، در رأس b کـه مجاور a است حق استفاده از رنگ آبی را نداریم امـا در رأس c مـی‌تـوانیم دوبـاره از رنـگ آبـی استفاده کنیم.

حالا ممکن است با سوالاتی روبرو شویم کـه در آن‌هـا شـرایط و محـدودیت‌هـای تـازه‌ای بـرای رنگ‌آمیزی رئوس مطرح شده باشد. برای چنین مسائلی فرمول مشخصی وجود ندارد ولی معمـولاً می‌توانیم رنگ‌آمیزی را از یک رأس آغاز کرده و سپس با رعایت شرط داده شده، به سـراغ رئـوس مجاور برویم و در هرکدام تعداد انتخاب‌ها را یادداشت کرده و از ضـرب آن‌هـا بـه جـواب نهـایی برسیم.

به نمونه زیر توجه کنید:

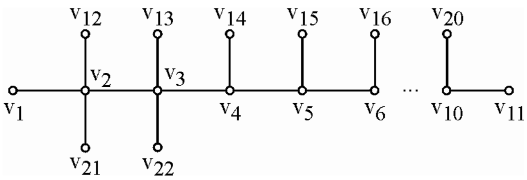
مثال: فرض کنیم T درختی است کـه دقیقـاً 2 رأس درجـه‌ی 4 و 7 رأس درجـه‌ی 3 دارد و سـایر رئوس آن، برگ‌هایش هسـتند. رنـگ‌هـای آبـی، قرمـز، زرد، سـبز و بـنفش را در اختیـار داریـم و می‌خواهیم رئوس T را چنان رنـگ‌آمیـزی کنـیم کـه رئـوس بـا فاصـله‌ی حـداکثر 2 از یکـدیگر، ناهمرنگ باشند. تعداد کل حالات ممکن برای انجام این کار کدام است؟

۱) $5\times4^9\times3^9$ ۲) $5\times3^9\times2^{11}$ ۳) $5\times4^{10}\times3^{11}$ ۴) $5\times3^{11}\times2^9$

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به شرط داده شده، اگر از یک رنگ در رأس v_i استفاده کـردیم، تـا دو گـام بعـدی، حـق استفاده از آن رنگ را نداریم.

بهتر است ابتدا درختی با شرایط داده شده را رسم کنیم و سپس رنگ‌آمیزی خواسته شـده را روی آن انجام بدهیم.



برای راحتی بیشتر، ابتدا رنگ‌آمیز مسیر v_1 تا v_{11} را انجام می‌دهیم.

برای v_1، 5 انتخاب داریم. برای v_2، 4 انتخاب داریم. هنگامی که نوبت به v_3 می‌رسد، رنگ‌های به کار رفته در v_1 و v_2 قابل استفاده نیستند پس 3 انتخاب خواهیم داشت. هنگامی رنـگ‌آمیـزی

v_4، رنگ‌های به کار رفته در v_3 و v_2 قابل استفاده نیستند پس در اینجا هم 3 انتخاب داریم. به این ترتیب می‌بینیم که برای رئوس $v_5, v_6, ..., v_{11}$ همواره 3 انتخاب خواهیم داشت. تا اینجا فقط مسیر ساده‌ای از v_1 تا v_{11} را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم و تعداد حالات رنگ‌آمیزی آن برابر با $5\times4\times3^9$ است.

اکنون به سراغ ردیف بالایی برگ‌ها می‌رویم. برای v_{12} حق استفاده از رنگ‌های به کار رفته در v_1, v_2 و v_3 را نداریم پس 2 انتخاب خواهیم داشت. همین اتفاق برای سایر برگ‌های ردیف بالا تکرار می‌شود و در هر کدام از آن‌ها 2 انتخاب داریم.

اکنون به 2 برگ ردیف پایین توجه می‌کنیم. هنگام رنگ‌آمیزی v_{21}، حق استفاده از رنگ‌های به کار رفته در v_1, v_2, v_3 و v_{12} را نداریم پس فقط یک انتخاب خواهیم داشت. به همین ترتیب برای V_{22} هم فقط یک انتخاب داریم. در نهایت با ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر رأس داریم:

تعداد کل حالات $= 5\times4\times3^9\times2^9\times1^2$

با توجه به آنکه $4=2^2$ است می‌توان نوشت:

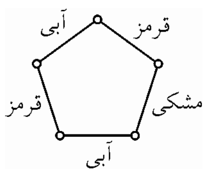
تعداد کل حالات $= 5\times3^9\times2^{11}$

رنگ‌آمیزی یالی گراف

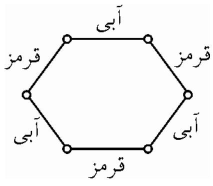
به طور معمول، وقتی صحبت از رنگ‌آمیزی گراف می‌کنیم، منظورمان رنگ‌آمیزی رئوس آن است. اما نوع دیگری از رنگ‌آمیزی وجود دارد که در آن به دنبال رنگ‌آمیزی یال‌های گراف هستیم. همانند رنگ‌آمیزی رأسی، در اینجا هم می‌خواهیم یال‌های مجاور غیرهمرنگ باشند. دو یال را مجاور گوییم هرگاه یک رأس مشترک داشته باشند.

گراف G را $k-$ رنگ‌پذیر یالی می‌گویند هرگاه بتوانیم با داشتن k رنگ، رنگ‌آمیزی یالی را انجام بدهیم. حداقل تعداد رنگ‌های موردنیاز برای رنگ‌آمیزی یالی را عدد رنگی یالی می‌نامیم و با $\chi'(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال: در گراف C_6 برای رنگ‌آمیزی یالی حداقل به 2 رنگ نیاز داریم. در گراف C_5 برای رنگ‌آمیزی یالی حداقل به 3 رنگ نیاز داریم. بنابراین عدد رنگی یالی گراف C_6 برابر با 2 و عدد رنگی یالی C_5 برابر با 3 است.



$\chi'(C_5)=3$



$\chi'(C_6)=2$

*** چند نکته در مورد رنگ‌آمیزی یالی:**

الف: $\chi'(C_{2n})=2$ و $\chi'(C_{2n+1})=3$ است.

ب: برای گراف چرخی داریم $\chi'(w_n)=n$

ج: فرض کنیم Δ ماکسیمم درجه‌ی رئوس گراف G باشد: $\Delta=\max\limits_{v_i\in V}(\deg(v_i))$ در ایـن صـورت $\chi'(G)=\Delta$ یا $\chi'(G)=\Delta+1$ است.

د: اگر G گرافی دو بخشی باشد آنگاه $\chi'(G)=\Delta$ است.

هـ: برای گراف کامل n رأسی داریم: $\chi'(K_n)=n$

مکمل گراف

مکمل گراف G، گرافی است مانند $\overline{G}$ که همان رئوس را دارد اما دقیقاً یال‌هـایی را دارد کـه در G قرار ندارند. البته G و $\overline{G}$ هر دو گراف‌های ساده هستند یعنی طوق ندارند.

در شکل فوق، گراف ساده G و مکمل آن $\overline{G}$ را نشان داده‌ایم. هر یالی که در G قـرار دارد، در $\overline{G}$ قرار ندارد و بالعکس.

واضح است که G و $\overline{G}$ روی هم گراف کامل را تشکیل می‌دهند. بنابراین برای هر گـراف سـاده‌ی n رأسی داریم:

$$\begin{cases}\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=n-1\\ e_G+e_{\overline{G}}=\dfrac{n(n-1)}{2}\end{cases}$$

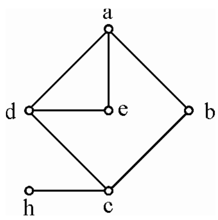
اولین تساوی واضح است. مثلاً در شکل قبل گرافی با $n=4$ رأس داریم. حالا اگر به درجه‌ی v_1 در دو گراف G و $\overline{G}$ توجه کنید خواهیم داشت:

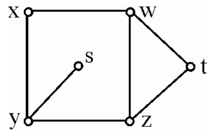
$$\deg_G(v_1)+\deg_{\overline{G}}(v_1)=1+2=3=n-1$$

تساوی دوم، مهم‌تر است و بیان می‌کند که یال‌های گراف G و یـال‌هـای گـراف $\overline{G}$ روی هـم بـه اندازه‌ی یال‌های گراف کامل k_n هستند.

یکریختی گراف‌ها

به گراف‌های G_1 و G_2 در شکل زیر توجه کنید:

G_1 : 

G_2 : 

اگر خوب دقت کنید متوجه می‌شوید که هر دوی آن‌ها در واقع یک گراف هستند که بـه دو شـکل مختلف رسم شده است.

هر دو گراف از کنار هم قرار گرفتن یک دور به طول 3 و یک دور به طول 4 ساخته شـده‌انـد کـه یک یال مشترک دارند. همچنین هر دوی آن‌ها یک رأس درجه‌ی یک دارند.

در چنین حالتی می‌گویند گراف‌های G_1 و G_2 با هم یکریخـت هسـتند. امـا اگـر بخـواهیم ایـن مطلب را به صورت علمی بیان کنیم، نیاز به یک تابع از G_1 به G_2 داریم کـه مشـخص کنـد هـر رأس در G_1، نماینده‌ی کدام رأس در G_2 است.

در مثال بالا، این تابع به این صورت خواهد بود:

$$f(h)=s \qquad f(d)=z$$
$$f(c)=y \qquad f(e)=t$$
$$f(b)=x \qquad f(a)=w$$

در مورد h، موضـوع روشـن اسـت. تنهـا رأس درجـه‌ی یـک در G_2، همـان رأس s اسـت پـس $f(h)=s$ خواهد بود. در گراف G_1، رأس h با c مجاور است در گراف G_2 رأس s با y مجـاور است پس معلوم می‌شود که $f(c)=y$ است.

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و با توجه به درجه‌ی رئـوس و نحـوه‌ی اتصـال آن‌هـا بـه یکـدیگر می‌توان یک رابطه‌ی دو سویی بین G_1 و G_2 برقرار کرد.

اکنون به تعریف دقیق یکریختی گراف‌ها و ویژگی‌های آن توجه کنید:

تعریف: فرض کنید $G_1=(V,E)$ و $G_2=(V',E')$ دو گـراف باشـند. تـابع $f:V\to V'$ را یـک یکریختی بین گراف‌ها می‌نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

الف) f تابعی یک به یک و پوشا باشد. در واقع یک تناظر یک به یک باشد که هـر رأس از گـراف G_1 را به یک رأس از گراف G_2 مرتبط می‌کند.

ب) هرگاه v_1 و v_2 دو رأس مجـاور در G_1 باشـند آنگـاه $f(v_1)$ و $f(v_2)$ نیـز بایـد دو رأس مجاور در G_2 باشند. این مطلب را می‌توان به زبان ریاضیات به این صورت بیان کرد:

$$(v_1,v_2)\in E \Leftrightarrow (f(v_1),f(v_2))\in E'$$

هرگاه چنین تابعی موجود باشد، می‌گوییم G_1 و G_2 یکریخت هستند و می‌نویسیم:

$$G_1 \simeq G_2$$

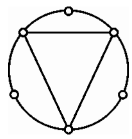
توجه: هر تابع یکریختی، درجه‌ی رئوس را حفظ می‌کند. بـرای مثـال اگـر $\deg(v)=k$ باشـد آنگاه $\deg(f(v))=\deg(v)$ است. به عبارتی داریم:

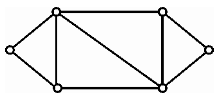
$$\deg(f(v))=\deg(v)$$

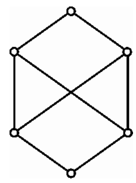
توجه: هرگاه دو گراف G_1 و G_2 باهم یکریخت باشند، تمام ویژگی‌های آن‌ها یکسان خواهـد بود. برای مثال، تعداد رئوس و تعداد یال‌ها همچنین دنباله‌ی درجـات رئـوس آن‌هـا بایـد یکسـان باشد. همچنین تعداد دورهای به طول 3، تعداد دورهای به طول 4 و ... عدد رنگی و چند جمله‌ای رنگی آن‌ها باید یکسان باشد.

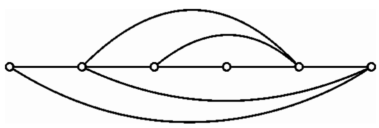
البته همه‌ی این‌ها شرط لازم برای یکریخت بودن گراف‌ها هستند و شرط کـافی نیسـتند. در واقـع اگر یکی از این ویژگی‌ها یکسان نباشد اطمینان می‌یابیم که گراف‌های G_1 و G_2 یکریخت نیستند اما حتی با یکسان بودن همه‌ی آن‌ها، بازهم نمی‌توان بـا اطمینـان گفـت کـه G_1 و G_2 یکریخـت هستند. تنها راه برای اثبات یکریخت بودن دو گراف، پیدا کردن یک تابع یکریختی از G_1 بـه G_2 است.

مثال: کدام جفت از گراف‌های زیر باهم یکریخت هستند؟

الف)


ب)


ج)


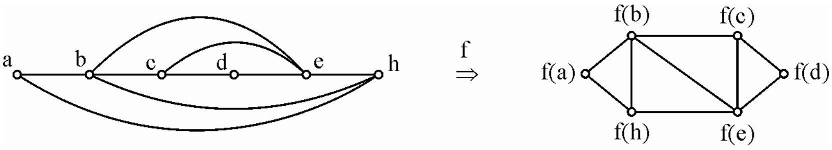
د)


۱) (ب) و (الف)   ۲) (ب) و (ج)   ۳) (الف) و (ج)   ۴) (ب) و (د)

پاسخ: همه‌ی گراف‌ها دارای 6 رأس هستند. اما اگر به درجه‌ی رئوس توجـه کنـیم، گـراف (الـف) دقیقاً دارای 3 رأس درجه 2 است، اما سایر گراف‌ها هرکدام دارای 2 رأس درجـه 2 هسـتند. پـس گراف (الف) با سایر گراف‌ها یکریخت نیسـت. گـراف‌هـای (ب) و (د) هرکـدام دارای 2 رأس از درجه‌ی 4 هستند در حالی که گراف (ج) هیچ رأسی از درجه 4 ندارد. پس گراف (ج) هم با سـایر گراف‌ها یکریخت نیست.

تنها امکان باقیمانده آن است که گراف‌های (ب) و (د) یکریخت باشند بنابراین گزینـه (۴) صـحیح است.

پاسخ کامل‌تر: برای اطمینان از یکریخت بودن گـراف‌هـای (ب) و (د) تـابع یکریختـی آن‌هـا را در شکل زیر نشان داده‌ایم:



می‌توانید تحقیق کنید که این تابع شرایط یکریختی را دارد.

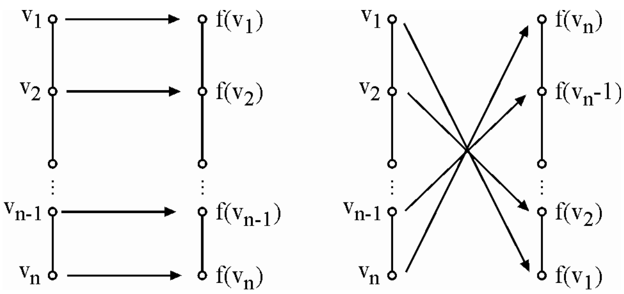
شمارش تعداد یکریختی‌ها و خودریختی‌ها

هرگاه f یک یکریختی از گراف G به روی خودش باشد یعنی $f:G\to G$ باشد آن را خودریختی می‌نامند. وقتی گراف‌های G_1 و G_2 یکریخت باشند، در واقع G_2 همان G_1 است که به نحو دیگری رسم شده است. به همین دلیل تفاوتی ندارد که ما تعداد یکریختی‌هایی مانند $f:G_1\to G_2$ را بخواهیم یا آنکه تعداد خودریختی‌هایی مانند $f:G_1\to G_1$ را بخواهیم. در واقع هر دوی این‌ها یک سوال هستند.

شمارش تعداد یکریختی‌ها از G_1 به G_2 در حالت کلی مسأله‌ی ساده‌ای نیست، با این حال برای برخی از گراف‌های مشهور می‌توانیم آن را حل کنیم.

الف: تعداد خودریختی‌ها برای یک مسیر ساده به طول n، برابر با 2 است.

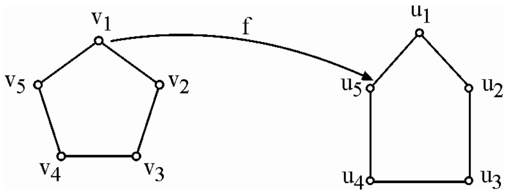
توضیح: مطابق شکل فرض کنید دو مسیر ساده به طول n داریم و می‌خواهیم بین آن‌ها تابع یکریختی پیدا کنیم. v_1 یک رأس درجه‌ی یک است، بنابراین $f(v_1)$ باید یک رأس درجه یک باشد. برای $f(v_1)$ دو انتخاب داریم. پس از مشخص کردن $f(v_1)$، تکلیف سایر رئوس مشخص می‌شود و آن‌ها باید با توجه به رعایت مجاورت‌ها، به رأس‌هایی از گراف دوم مربوط شوند. در واقع برای انتخاب $f(v_i)$ ها دو راه داریم. یکی از ابتدا به انتها و دیگری از انتها به ابتدا:



[از یک مسیر به طول n، به یک مسیر به طول n، دو تابع یکریختی وجود دارد.]

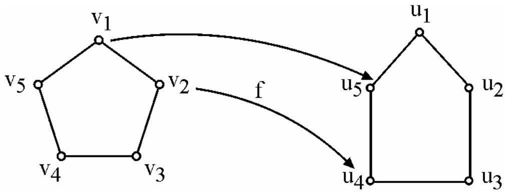
ب: تعداد خودریختی‌ها برای دور ساده‌ی C_n برابر با $2n$ است.

توضیح: برای توضیح ساده‌تر، گراف C_5 را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تابعی یکریختی از C_5 به C_5 پیدا کنیم. در شکل زیر برای $f(v_1)$، 5 انتخاب داریم زیرا v_1 را می‌توانیم به هرکدام از رئوس $u_1, u_2, ..., u_5$ مربوط کنیم زیرا همه آن‌ها مانند v_1 دارای درجه 2 هستند و وضعیت مشابهی در گراف دارند. مثلاً فرض کنید $f(v_1)=u_5$ باشد.



حالا که v_1 را به u_5 بردیم، v_2 هم باید به رأسی برود که با u_5 مجاور باشد. می‌بینید کـه بـرای v_2 دو انتخاب داریم: $f(v_2)=u_1$ یا $f(v_2)=u_4$.

برای مثال فرض کنید تصمیم بگیریم که $f(v_2)=u_4$ باشد.



در ادامه، با توجه به آنکه $f(v_1)=u_5$ و $f(v_2)=u_4$ است، برای v_3 تنها انتخـاب آن اسـت کـه $f(v_3)=u_3$ باشد. برای سایر رئوس هم تا انتها فقط یک انتخاب اجباری وجود دارد کـه بـه ایـن صورت است:

$$f(v_3)=u_3 \quad , \quad f(v_4)=u_2 \quad , \quad f(v_5)=u_1$$

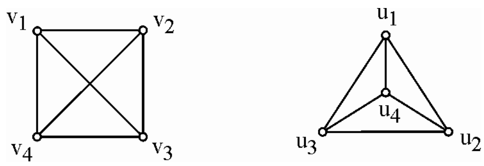
به این ترتیب می‌بینید که تعداد کل حالات ممکن برابر است با: $5\times2\times1\times1\times1=10$.

با همین استدلال برای C_n، تعداد کل یکریختی‌ها برابر با $2n$ خواهد بود.

ج: تعداد خودریختی‌های گراف کامل (k_n) برابر با $n!$ است.

توضیح: با توجه به آنکه در گراف کامل k_n همه‌ی رئوس باهم مجاورند و همه آنها از درجـه‌ی $n-1$ هستند، با هر ترتیبی که رئوس گراف k_n را به رئوس گراف k_n ببـریم، یـک خـودریختی خواهیم داشت. به همین دلیـل تعـداد خـودریختی‌هـای گـراف کامـل برابـر اسـت بـا تعـداد کـل جایگشت‌های n شی که برابر با $n!$ است.

برای مثال در شکل زیر می‌خواهیم تابعی یکریختی از گراف کامل k_4 بـه گـراف کامـل k_4 پیـدا کنیم.



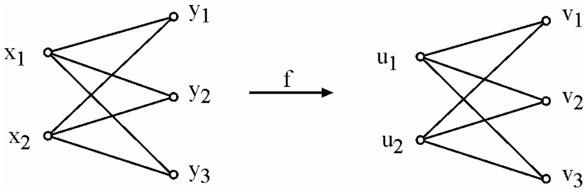
برای v_1، 4 انتخاب مختلف داریم زیرا آن را می‌توانیم بـه هرکـدام از رئـوس $u_1,...,u_4$ مربـوط کنیم. فرض کنیم $f(v_1)=u_1$ باشد. اکنون برای v_2 که با v_1 مجـاور اسـت، 3 انتخـاب خـواهیم

داشت. v_2 می‌تواند به هر کدام از رئـوس u_4, u_3, u_2 مربـوط شـود. فـرض کنـیم $f(v_2) = u_2$ باشد. به همین ترتیب برای v_3 دو انتخاب بـاقی مـی‌مانـد کـه u_3 یـا u_4 هسـتند. فـرض کنـیم $f(v_3) = u_3$ باشد. در نهایت برای v_4 فقط یک انتخاب باقی می‌ماند: $f(v_4) = u_4$.

تعداد کل حالات $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

د: تعداد خودریختی‌های گراف کامل دو بخشی $k_{n,m}$ که $n \neq m$ باشد $n!m!$ است.

توضیح: فرض کنید می‌خواهیم از گراف سمت چپ به گراف سمت راست، تـابع یکریختـی پیـدا کنیم و هر دوی آن‌ها در واقع $k_{2,3}$ هستند.

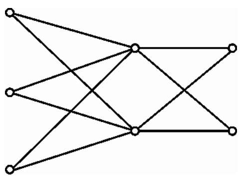


برای رعایت شرط یکریختی بودن، رئوس x_1 و x_2 که از درجه 3 هستند بایـد بـه رئـوس u_1 و u_2 که آن‌ها هم از درجه 3 هستند مربوط شـوند. بـرای انجـام ایـن کـار $2!$ حالـت وجـود دارد. همچنین رئوس y_1, y_2, y_3 باید به ترتیب دلخواهی به رئوس v_1, v_2, v_3 مربوط شوند که بـرای انجام این کار هم $3!$ حالت مختلف وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالات ممکن بـرای f برابـر بـا $2!3!$ است.

هـ : تعداد خودریختی‌های گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$ برابر با $2n!n!$ است.

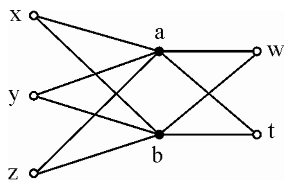
توضیح: در قسمت (د) دیدیم که وقتی $n \neq m$ باشد، رئوس بخش n عضوی باید به رئوس بخش n عضوی تبدیل شوند و رئوس بخش m عضوی هم باید به رئوس بخش m عضوی تبدیل شوند. حالا اگر $n = m$ باشد می‌توان جای این دو بخش را هـم بـاهم عـوض کـرد بنـابراین تعـداد کـل حالات ممکن، 2 برابر می‌شود.

مثال: تعداد خودریختی‌های گراف G کدام است؟

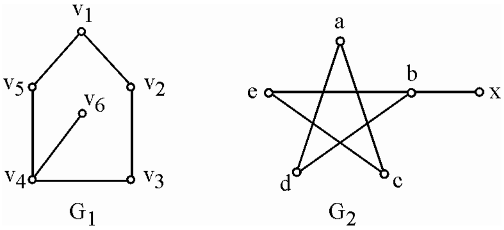


۱) 120
۲) 240
۳) 144
۴) 288

پاسخ: اگر مطابق شکل رئوس گراف G را رنگ‌آمیزی کنید، متوجه می‌شوید که G یـک گـراف دو بخشی کامل است که یک بخش آن $X = \{a, b\}$ و بخش دیگـر آن $Y = \{x, y, z, w, t\}$ اسـت و هر یال، یک عضو X را به یک عضو Y متصل می‌کند. در واقع $G = K_{2,5}$ است.
بنابراین تعداد خودریختی‌های G برابر با $2!5! = 240$ است.



مثال: تعداد یکریختی‌ها از G_1 به G_2 کدام است؟



۱) 10

۲) 2

۳) 5

۴) 4

پاسخ: بهتر است از رئوس v_6 و v_4 که به لحاظ درجه با سایر رئوس تفاوت دارند آغاز کنیم. x تنها رأس درجه یک در گراف G_2 است پس باید $f(v_6) = x$ باشد.

برای $f(v_4)$ هم فقط یک انتخاب داریم زیرا b تنها رأس درجه 3 در G_2 است: $f(v_4) = b$

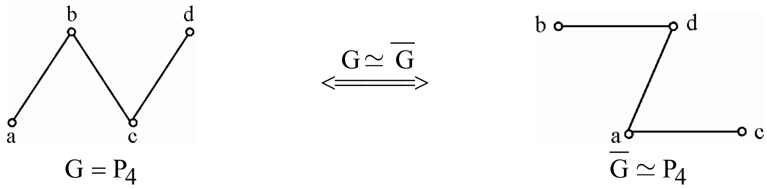
حالا به v_3 و v_5 توجه کنید. هر دوی آن‌ها درجه 2 هستند و با v_4 مجاور هستند. بنابراین v_3 و v_5 باید به یک ترتیب دلخواه به رئوس e و d مربوط شوند. در اینجا دو انتخاب داریم: یا $f(v_3) = e$ و $f(v_5) = d$ و یا آن که $f(v_3) = d$ و $f(v_5) = e$. هرکدام از این دو را که انتخاب کنید، وضعیت سایر رئوس هم به شکل اجباری مشخص می‌شود. بنابراین فقط 2 یکریختی از G_1 به G_2 وجود دارد.

گراف خودمکمل

گاهی اوقات، گراف G با گراف مکمل خودش یعنی $\overline{G}$ یکریخت می‌شود. در این حالت G را خود مکمل می‌گوییم.

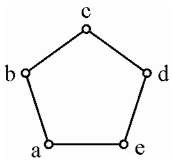
گراف‌های خود مکمل، کم‌یاب هستند و در اینجا به 3 نمونه مشهور از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

مثال ۱: گراف P_4 یعنی یک مسیر ساده به طول 3، گرافی خود مکمل است.



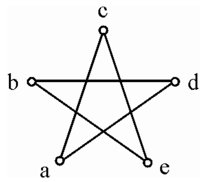
همانطور که در شکل می‌بینید، مکمل یک مسیر به طول 3؛ باز هم یک مسیر به طول 3 است.

مثال ۲: گراف C_5 خود مکمل است.



$G = C_5$

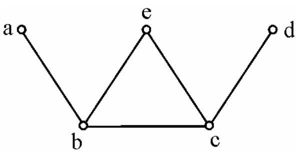
$\xLeftrightarrow{G \simeq \overline{G}}$



$\overline{G} \simeq C_5$

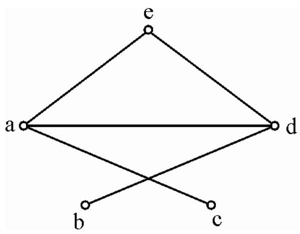
مطابق شکل؛ وقتی G یک دور ساده به طول 5 باشد؛ مکمل آن هم یک دور ساده به طول 5 خواهد بود. پس C_5 خود مکمل است.

مثال ۳: گراف G که از اضافه کردن دو رأس درجه یک به یک مثلث ساخته می‌شود خود مکمل است.



G

$\xLeftrightarrow{G \simeq \overline{G}}$



$\overline{G}$

در گراف G یک دور به طول 3 به همراه 2 رأس درجه یک داریم. در گراف مکمل آن یعنی $\overline{G}$ هم دقیقاً یک دور به طول 3 به همراه 2 رأس درجه یک ظاهر می‌شود. پس G و $\overline{G}$ باهم یکریخت هستند.

قضیه: اگر G خودمکمل باشد آنگاه تعداد رئوس آن باید $n = 4k$ یا $n = 4k+1$ باشد.

برهان: اگر G خود مکمل باشد آنگاه تعداد یال‌های G و $\overline{G}$ برابر است. در ضمن می‌دانیم که همیشه $e_G + e_{\overline{G}} = \frac{n(n-1)}{2}$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$e_G = e_{\overline{G}} \Rightarrow e_G + e_G = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n(n-1) = 4e_G$$

سمت راست معادله، مضرب 4 است پس یا $n = 4k$ یا $n-1 = 4k$ به عبارتی $n = 4k$ یا $n = 4k+1$.

نتیجه ۱: فرض کنید می‌خواهیم خود مکمل بودن گراف G را بررسی کنیم. ابتدا به تعداد رئوس آن توجه می‌کنیم. اگر $n = 4k$ یا $n = 4k+1$ باشد، ممکن است G بتواند خود مکمل شود. اما اگر $n \neq 4k$ و $n \neq 4k+1$ آنگاه G قطعاً خود مکمل نیست. برای مثال هر گرافی که 10 رأس داشته باشد قطعاً خود مکمل نیست. اما گراف‌هایی با 5 یا 9 یا 8 رأس ممکن است خود مکمل باشند.

نتیجه ۲: در گرافی با n رأس و e یال، اگر تساوی $n(n-1)=4e$ برقرار باشد، آن گراف ممکن است خود مکمل باشد اما اگر $n(n-1)\neq 4e$ باشد، قطعاً خود مکمل نیست.

مثال: در بین دورهای ساده‌ی C_n، کدام‌ها خود مکمل هستند؟

۱) C_5 و C_9
۲) C_4 و C_5 و C_7
۳) فقط C_5
۴) C_5 و C_8 و C_{10}

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

گراف C_n دارای n رأس و $e=n$ یال است. برای آنکه C_n خود مکمل شود، حداقل شرط لازم آن است که $n=4k$ یا $n=4k+1$ باشد. از طرفی، لازم است که تساوی $n(n-1)=4e$ برقرار باشد.

$$e=n \Rightarrow n(n-1)=4n \Rightarrow n-1=4 \Rightarrow n=5$$

فقط C_5 می‌تواند خود مکمل باشد. در مثال‌های قبل نشان داده‌ایم که C_5 خود مکمل هست. پس گزینه (۳) صحیح است.

توجه:

الف: اگر G ناهمبند باشد، آنگاه $\overline{G}$ همبند است. به عبارتی G و $\overline{G}$ هر دو با هم نمی‌توانند ناهمبند باشند.

ب: هر گراف خود مکمل، حتماً همبند است.

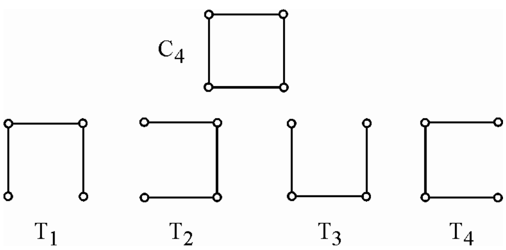
تعداد درختان پوشا (فراگیر) یک گراف

فرض کنیم G یک گراف همبند باشد. اگر G شامل دور باشد، می‌توانیم با حذف تعدادی از یال‌ها، به یک درخت برسیم که همه‌ی رئوس گراف G را شامل می‌شود. به این درخت، یک درخت فراگیر یا پوشا می‌گوییم. تعداد درختان فراگیر گراف G را با $\tau(G)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از نکات زیر می‌توانیم تعداد درختان فراگیر گراف‌های مختلف را حساب کنیم.

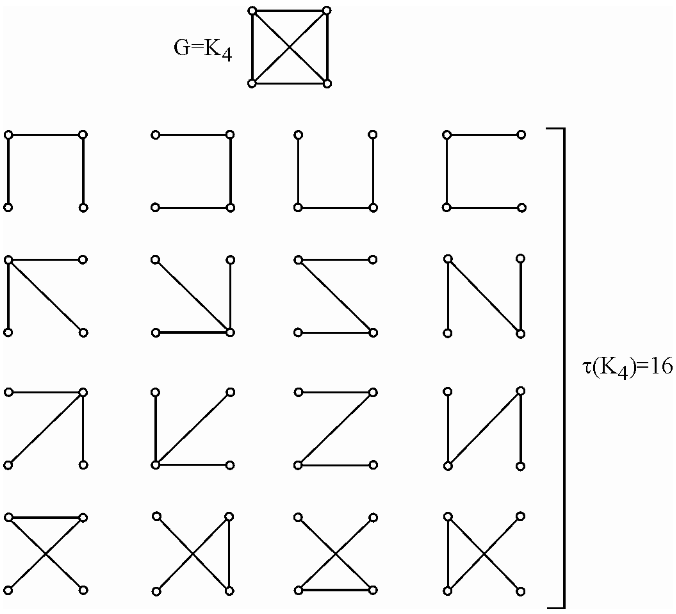
الف: اگر G=Tree یک درخت باشد، تنها درخت فراگیر آن خودش است به عبارتی $\tau(\text{Tree})=1$.

ب: اگر $G=C_n$ دوری به طول n باشد، با حذف هر یال می‌توان به یک درخت فراگیر رسید بنابراین $\tau(C_n)=n$.

مثلاً گراف C_4 دارای 4 درخت فراگیر است:

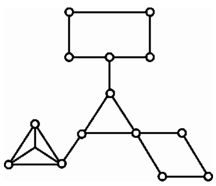


ج: گراف کامل k_n دارای n^{n-2} درخت فراگیر است: $\tau(k_n)=n^{n-2}$
برای مثال گراف k_4 دارای $4^{4-2}=16$ درخت فراگیر مطابق شکل است:



د: اگر گراف G از دو بخش G_1 و G_2 تشکیل شده باشد که با رأس برشی یا یال برشی به هم متصل شده‌اند، آنگاه: $\tau(G)=\tau(G_1).\tau(G_2)$.
این مطلب برای تعداد بیشتری از گراف‌ها که به صورت برشی به هم متصل باشند هم درست است.

مثال: تعداد درختان فراگیر گراف G کدام است؟



۱) 240
۲) 820
۳) 960
۴) 1024

پاسخ: گراف‌های C_5، C_3 و C_4 و K_4 به صورت برشی به هم متصل شده‌اند. بنابراین داریم:
$\tau(G)=\tau(C_5)\tau(C_3)\tau(C_4)\tau(K_4)=5\times3\times4\times4^{4-2}=960$
گزینه (۳) صحیح است.

هـ : تعداد درختان فراگیر گراف $K_{n,m}$ برابر با $\tau(K_{n,m})=n^{m-1}.m^{n-1}$ است. برای مثال، گراف کامل دوبخشی $K_{2,3}$ دارای $2^{3-1}\times3^{2-1}=12$ درخت فراگیر است.

توجه: تا اینجا دیدیم که تعداد درختان فراگیر گراف‌های مشهور با فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$\tau(\text{Tree})=1\ ;\ \tau(C_n)=n\ ;\ \tau(K_n)=n^{n-2}\ ;\ \tau(K_{n,m})=n^{m-1}.m^{n-1}$$

همچنین دیدیم که اگر برخی از این گراف‌ها با یال برشی یا رأس برشی به هم متصل شوند، تعداد درختان فراگیر از فرمول $\tau(G)=\tau(G_1).\tau(G_2)$ به دست می‌آید. اما در حالت کلی، چگونه می‌توانیم تعداد درختان فراگیر سایر گراف‌ها را تعیین کنیم؟

برای این کار یکی از یال‌ها را که با حذف آن، به گراف ساده‌تری می‌رسیم انتخاب کرده و سپس از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم G گرافی ساده و e یکی از یال‌های G باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G.e)$$

$G-e$ گرافی است که با حذف یال e به دست می‌آید و G.e گرافی است که با منطبق کردن دو سر e بر هم حاصل می‌شود. اگر x و y دو سر e باشند، برای منطبق کردن y بر x، ابتدا رأس y را روی x قرار دهید و سپس همه‌ی یال‌هایی که با y در ارتباط بودند را به محل جدید آن منتقل کنید.

حین انجام این کار ممکن است یال‌های مضاعف ایجاد شوند.

مثال: فرض کنیم G_1 گرافی است که از دو دور ساده‌ی C_n و C_m با یک رأس مشترک تشکیل شده است و G_2 گرافی باشد که از دو دور ساده‌ی C_n و C_m با یک یال مشترک تشکیل شده است. تعداد درختان فراگیر این گراف‌ها به کدام صورت است؟

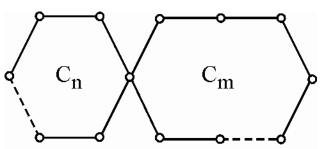
۱) $\tau(G_1)=nm\ ,\ \tau(G_2)=nm-1$

۲) $\tau(G_1)=nm-1\ ,\ \tau(G_2)=nm$

۳) $\tau(G_1)=n+m\ ,\ \tau(G_2)=(n-1)(m-1)$

۴) $\tau(G_1)=nm\ ,\ \tau(G_2)=(n-1)(m-1)$

پاسخ: در گراف G_1 دورهای C_n و C_m با یک رأس برشی به هم متصل هستند.

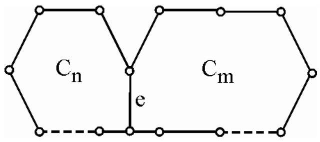


G_1

بنابراین می‌توان از این فرمول استفاده کرد:

$$\tau(G_1)=\tau(C_n).\tau(C_m)=nm$$

در گراف G_2 دورهای C_n و C_m با یک یال مشترک به هم متصل هستند.

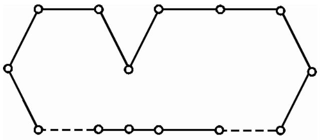


در گراف G_2 یال e از نوع برشی نیست زیرا با حذف آن، گراف ناهمبند نمی‌شود. بنابراین نمی‌توانیم از حاصل ضرب $\tau(C_n).\tau(C_m)$ استفاده کنیم.

برای گراف $G = G_2$ از قضیه‌ای که در حالت کلی برقرار است استفاده خواهیم کرد:

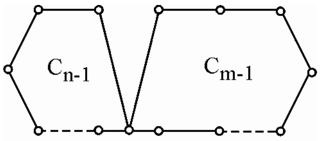
$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$$

در گراف G-e، با حذف یال e، به یک دور ساده می‌رسیم که تعداد یال‌هایش $(n-1)+(m-1) = n+m-2$ است بنابراین $G-e = C_{n+m-2}$ است.


G-e=C_{n+m-2}

$$\Rightarrow \tau(G-e) = \tau(C_{n+m-2}) = n+m-2$$

در گراف G.e دو سر یال e را بر هم منطبق می‌کنیم. در این گراف دورهای ساده‌ی C_{n-1} و C_{m-1} با یک رأس برشی به هم متصل شده‌اند:



G.e

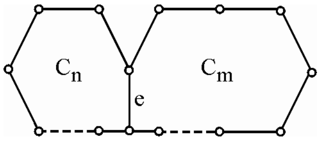
$$\Rightarrow \tau(G.e) = \tau(C_{n-1})\tau(C_{m-1}) = (n-1)(m-1)$$

با جمع کردن این دو عدد خواهیم داشت:

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e) = n+m-2+(n-1)(m-1) = nm-1$$

توجه: در فرمول $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$، هر کدام از مقادیر $\tau(G-e)$ و $\tau(G.e)$ نشان‌دهنده‌ی یک دسته از درختان فراگیر گراف G هستند. $\tau(G-e)$ تعداد درختان فراگیر گراف G را نشان می‌دهد که از یال e در آنها استفاده نمی‌شود و $\tau(G.e)$ تعداد درختان فراگیری را نشان می‌دهد که از یال e در آنها استفاده شده است.

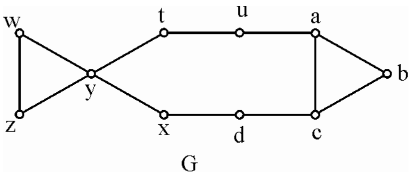
مثال: در گراف G که از دو دور C_n و C_m با یال مشترک e ساخته شده است، دیدیم که:



$$\tau(G) = nm-1$$
$$\tau(G-e) = (n-1)+(m-1) = n+m-2$$
$$\tau(G.e) = (n-1)(m-1)$$

بنابراین تعداد کل درختان فراگیر، $nm-1$ است. تعداد درختان فراگیری که از یال e در آنها استفاده نشده است، $n+m-2$ است و تعداد درختان فراگیری که شامل یال e هستند، $(n-1)(m-1)$ است.

مثال: تعداد درختان پوشا (فراگیر) گراف G کدام است؟



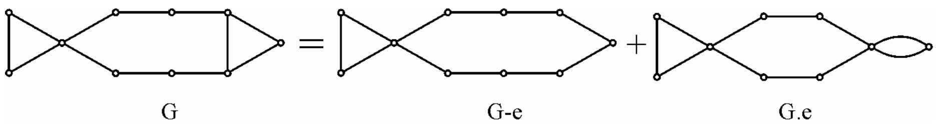
۱) 48

۲) 60

۳) 81

۴) 80

پاسخ: یال $e=ac$ را برای حذف انتخاب می‌کنیم. اکنون طبق قضیه داریم:



با توجه به رأس‌های برشی داریم:

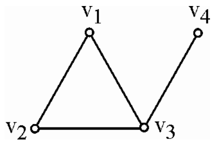
$$\tau(G)=(3)(8)+(3)(6)(2)=24+36=60$$

گراف G دارای 60 درخت فراگیر است، از این تعداد، در 24 درخت فراگیر از یال e استفاده نمی‌شود و در 36 تا از آنها، یال e مورد استفاده قرار گرفته است.

محاسبه تعداد درختان فراگیر با استفاده از ماتریس

گراف ساده‌ی G را در نظر بگیرید. برای محاسبه‌ی $\tau(G)$ یک روش ماتریسی وجود دارد. البته از آنجا که حجم محاسبات در این روش زیاد است، بیشتر برای محاسبه‌ی $\tau(G)$ توسط ماشین، کاربرد دارد. با این حال بهتر است نحوه‌ی استفاده از این روش را بدانیم.

گراف G را مطابق شکل در نظر بگیرید:



این گراف دارای $n=4$ رأس است. یک ماتریس $H_{4\times4}$ تشکیل می‌دهیم که سطرها و ستون‌های آن نماینده‌ی رئوس G هستند. در قطر اصلی این ماتریس، درجه‌ی رئوس را قرار می‌دهیم. برای مثال $h_{11}=\deg(v_1)=2$ و $h_{44}=\deg(v_4)=1$ است.

در مورد سایر درایه‌ها اگر رئوسی v_i و v_j مجاور باشند، $h_{ij}=-1$ است و اگر مجاور نباشند $h_{ij}=0$ است.

برای گراف G که در شکل رسم شده است، ماتریس H چنین است:

$$H = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

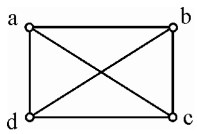
اکنون سطر و ستون مربوط به یکی از رئوس را حذف می‌کنیم.
تفاوتی ندارد که کدام رأس را برای حذف انتخاب کنید. مثلاً ما سطر و ستون مربوط به v_1 را حذف می‌کنیم. دترمینان ماتریسِ به دست آمده، برابر با $\tau(G)$ خواهد بود:

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3-1)-(-1)(-1-0)+0 = 3$$

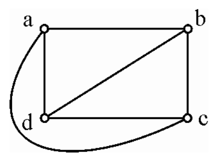
همان‌طور که می‌بینید اگر تعداد رئوس گراف G بیشتر از 4 رأس باشد، استفاده از این روش به صورت دستی، وقت‌گیر خواهد بود اما ماشین می‌تواند محاسبه‌ی دترمینان را به سرعت انجام بدهد و با این روش به مقدار $\tau(G)$ برسد.

گراف‌های مسطح (هامنی)

گراف G را مسطح (هامنی) گوییم هرگاه بتوانیم آن را به گونه‌ای در صفحه رسم کنیم که یال‌های آن در نقطه‌ای به جز رئوس گراف، یکدیگر را قطع نکنند.
برای مثال همه‌ی درخت‌ها و گراف‌های C_n و W_n مسطح هستند. گراف کامل K_4 نیز مسطح است.
همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، می‌توان یال ac را طوری رسم کرد که یال‌های گراف K_4 تقاطع کاذب نداشته باشند:



$\Rightarrow$

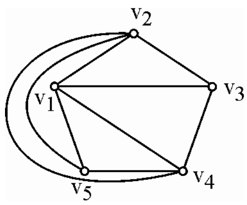


(در این ترسیم از K_4 یال‌ها یک تقاطع کاذب در وسط دارند)

(این ترسیم از K_4 نشان می‌دهد که این گراف مسطح است)

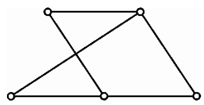
قضیه: گراف‌های کامل K_n به ازای $n \geq 5$ نامسطح هستند.
در واقع K_5 اولین گراف نامسطح است. به عبارتی اگر 5 شهر داشته باشید و بخواهید هر جفت از آنها را با یک جاده مستقیم به هم متصل کنید، ناچار می‌شوید حداقل از یک پل استفاده کنید.
توجه داشته باشید که اگر از گراف K_5 یک یال را حذف کنیم، می‌توانیم آن را به صورت مسطح رسم کنیم. در واقع $K_5 - e$ مسطح است.

در شکل مقابل ما توانسته‌ایم همه‌ی یال‌های گراف K_5 به جز یال $e = v_3v_5$ را به صورت مسطح رسم کنیم.

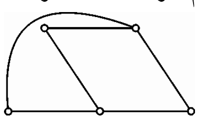


قضیه: گراف‌های دوبخشی کامل $K_{n,m}$ با این شرط که $n \leq 2$ یا $m \leq 2$ باشد مسطح هستند برای مثال گراف $K_{2,5}$ مسطح است. اگر $n \geq 3$ و $m \geq 3$ باشند، $K_{n,m}$ نامسطح خواهد بود. $K_{3,3}$ اولین گراف نامسطح دوبخشی است.

پرسش مهم: چگونه می‌توانیم مسطح یا نامسطح بودن یک گراف را تشخیص دهیم. فرض کنید یک گراف مانند G داریم و می‌خواهیم مسطح یا نامسطح بودن آن را تشخیص دهیم. معمولاً در ابتدا تلاش می‌کنیم با تغییر دادن نحوه‌ی رسم یال‌ها، تقاطع آنهارا از بین ببریم. برای مثال گراف



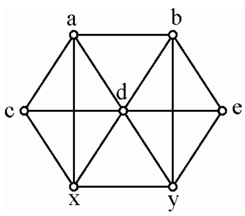
به وضوح مسطح است زیرا می‌توان آن را به صورت



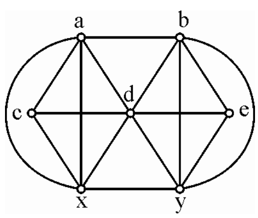
رسم کرد.

اگر موفق شویم که گراف را به صورت مسطح رسم کنیم، از مسطح بودن آن مطمئن می‌شویم. حالا فرض کنید که نمی‌توانیم در مدت کوتاهی، گراف را به شکل مسطح رسم کنیم. در اینجا باید به طریقی اطمینان پیدا کنیم که گراف نامسطح است.

مثال: مسطح یا نامسطح بودن گراف G را بررسی کنید.



پاسخ: کافیست یال‌های by و ax را به صورت زیر رسم کنیم:



پس گراف G مسطح است و نیازی به بررسی بیشتر نداریم.

برای اثبات نامسطح بودن یک گراف، از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

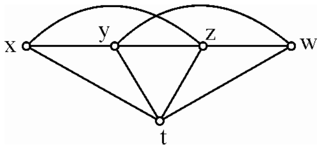
قضیه کوراتوفسکی: گراف G نامسطح است اگر و تنها اگر زیرگرافی داشته باشد که با K_5 یا $K_{3,3}$ یکریخت (یا همریخت) است.

استفاده از این قضیه نیاز به توضیح دارد.

اگر گراف داده شده حداقل دارای 5 رأس باشد که هر کدام حداقل از درجه 4 باشند، این احتمال را می‌دهیم که در آن گراف بتوانیم زیرگرافی مانند K_5 را پیدا کنیم. برای این کار، 5 رأس موردنظر را $v_1, \dots, v_5$ بنامید و بررسی کنید که آیا هر کدام از آنها، با چهار رأس دیگر مجاور است یا خیر؟ اگر چنین رئوسی را پیدا کردید، گراف داده شده شامل K_5 است و با اطمینان می‌گوییم که مسطح نیست.

اگر K_5 در گراف G وجود نداشته باشد، ممکن است بتوانیم $K_{3,3}$ را در آن پیدا کنیم. برای وجود $K_{3,3}$ حداقل باید 6 رأس که درجه‌ی هر کدام حداقل 3 باشد وجود داشته باشد. سعی می‌کنیم با استفاده از رنگ‌آمیزی رأسی، این 6 رأس را به دو بخش آبی و قرمز که هر بخش 3 عضو داشته باشد تقسیم کنیم. اگر همه رئوس آبی با همه رئوس قرمز مجاور باشند، ما موفق شده‌ایم که $K_{3,3}$ را پیدا کنیم.

مثال: مسطح یا نامسطح بودن گراف G را بررسی کنید.

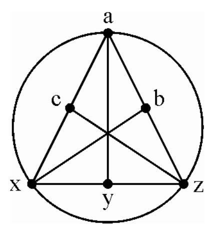


پاسخ: در این گراف، نمی‌توانیم 5 رأس با درجه‌ی حداقل 4 پیدا کنیم پس مطمئن هستیم زیرگرافی مانند K_5 در آن وجود ندارد.

از طرفی برای یافتن $K_{3,3}$ باید 6 رأس با درجه‌ی حداقل 3 در گراف G وجود داشته باشد که چنین نیست. پس این گراف، شامل $K_{3,3}$ هم نیست. به این ترتیب با اطمینان می‌گوییم که گراف G مسطح است.

(برای ترسیم این گراف به شکل مسطح، کافیست جای z و y را عوض کنید).

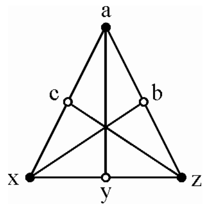
مثال: مسطح یا نامسطح بودن گراف G را بررسی کنید.



پاسخ: در نگاه اول به نظر نمی‌رسد که بتوان گراف را به شکل مسطح رسم کرد. اما باید از نامسطح بودن G اطمینان پیدا کنیم.

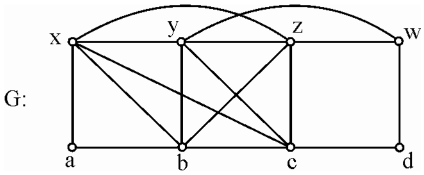
به دنبال یافتن K_5 یا $K_{3,3}$ در این گراف هستیم. برای آن که K_5 در این گراف وجود داشته باشد، حداقل به 5 رأس که درجه آنها حداقل 4 باشد نیاز داریم. پس در این گراف، K_5 وجود ندارد.

برای ایجاد $K_{3,3}$ به 6 رأس که درجه آنها حداقل 3 باشد نیاز داریم که در این گراف 6 رأس با این شرایط وجود دارد. اکنون باید بتوانیم این 6 رأس را به دو بخش آبی و قرمز تقسیم کنیم که تشکیل $K_{3,3}$ را بدهند.



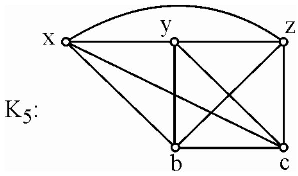
مطابق شکل می‌بینید که اگر $X = \{a, x, z\}$ را در یک بخش و $Y = \{b, c, y\}$ را در بخش دیگر فرض کنیم، گراف $K_{3,3}$ در گراف G وجود دارد. پس G نامسطح است.

مثال: مسطح یا نامسطح بودن گراف G را بررسی کنید.



پاسخ: ببینیم آیا در این گراف می‌توانیم K_5 را پیدا کنیم یا خیر؟

برای شروع به 5 رأس که درجه‌ی هر کدام از آنها حداقل 4 باشد نیاز داریم. پس رئوس x, y, z, b, c را در نظر می‌گیریم. حالا ببینیم آیا این 5 رأس به همراه یال‌هایی که بین آنها قرار دارد، تشکیل K_5 را می‌دهند یا خیر؟



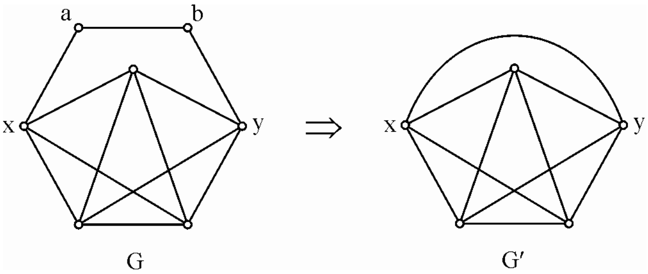
در شکل مقابل می‌بینید که این 5 رأس همگی با هم مجاور هستند و در واقع K_5 زیرگرافی از G است پس G گرافی نامسطح است.

تقسیم مبنا

اکنون می‌خواهیم توجه شما را به مطلب جدیدی جلب کنیم که طبق تعریف همریختی گراف‌ها، حق استفاده از آن را داریم.

برای یافتن زیرگرافی مثل K_5 یا $K_{3,3}$ در گراف G، شما می‌توانید رئوس درجه 2 را به عنوان یک واسطه یالی بین دو رأس دیگر در نظر بگیرید. برای مثال می‌توانید در گراف G (شکل سمت

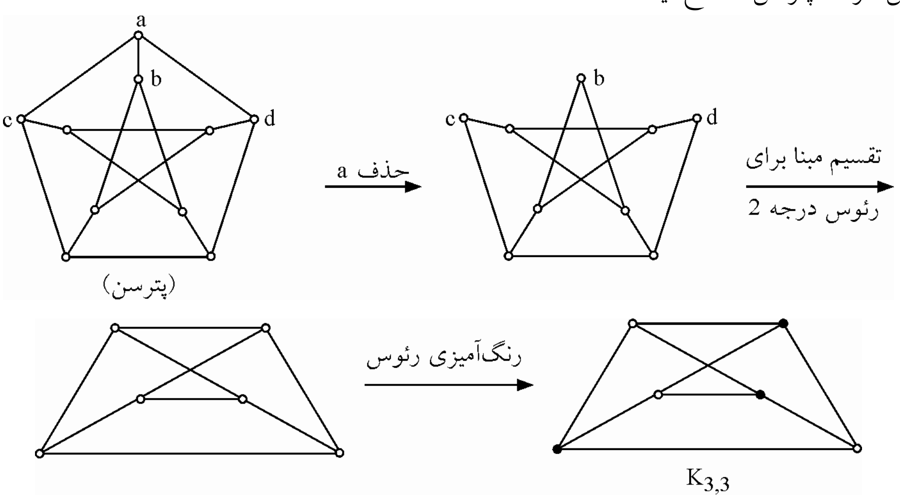
چپ)، رئوس درجه دوی a و b را مانند یک واسطه‌ی یالی بین دو رأس x و y تصور کنید و گراف G' (شکل سمت راست) را ایجاد کنید. اگر G' مسطح باشد، G هم مسطح است و بالعکس.



گراف G' همان K_5 است پس نامسطح است و در نتیجه G هم نامسطح است.
مثال بعدی نشان می‌دهد که تقسیم مبنا برای رأس‌های با درجه بیشتر هم قابل انجام است.

مثال: گراف پترسن مسطح است یا نامسطح؟

پاسخ: یک مثال معروف از کاربرد تقسیم مبنا؛ اثبات نامسطح بودن گراف پترسن است. در این گراف، رأس با درجه‌ی حداقل 4 وجود ندارد. پس در آن K_5 وجود ندارد. اما اگر رأس a را حذف کنیم و سپس از تقسیم مبنا مطابق شکل استفاده کنیم می‌بینیم که در آن $K_{3,3}$ وجود دارد. پس گراف پترسن مسطح نیست.



فرمول اویلر برای گراف‌های مسطح همبند

گراف همبند و مسطح G را در نظر بگیرید. وقتی این گراف را به صورت مسطح در صفحه رسم می‌کنیم، صفحه را به یک یا چند ناحیه تقسیم می‌کند. یکی از این نواحی، بی‌کران است و اگر

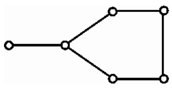
گراف شامل دور هم باشد، تعدادی ناحیه‌ی کران‌دار هم ایجاد می‌شود. تعداد نواحی (وجوه) گراف را با r نشان می‌دهیم.

فرمول اویلر، رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها، تعداد رئوس و تعداد نواحی در گراف همبند و مسطح G برقرار می‌کند.

قضیه اویلر: در هر گراف همبند مسطح داریم: $r = e - n + 2$

برای مثال در هر درخت، فقط یک ناحیه داریم که همان ناحیه‌ی بی‌کران است. همچنین $e = n - 1$ است. طبق فرمول اویلر داریم:

$$r = n - 1 - n + 2 = 1$$

در گراف  داریم $n = 6$ و $e = 6$ و در نتیجه $r = 6 - 6 + 2 = 2$.

همان‌طور که از شکل این گراف مشخص است، صفحه را به 2 ناحیه‌ی بی‌کران و کران‌دار تقسیم می‌کند.

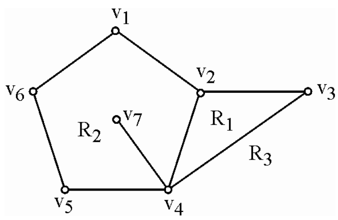
توجه: اگر G گرافی مسطح اما ناهمبند باشد که دارای K مؤلفه‌ی همبندی است، فرمول اویلر به صورت $r = e - n + (K + 1)$ درمی‌آید.

توجه کنید که وقتی G همبند باشد، فقط یک مؤلفه‌ی همبندی دارد $(K = 1)$ و همان فرمول $r = e - n + 2$ به دست می‌آید.

درجه‌ی هر ناحیه (وجه)

فرض کنید R یکی از نواحی ایجاد شده در گراف G باشد. اگر مرز این ناحیه را بپیماییم، تعداد یال‌های مرزی آن به دست می‌آید که به آن درجه‌ی R می‌گوییم. برای توضیح بهتر، به مثال زیر توجه کنید:

در این گراف دو ناحیه‌ی کران‌دار R_1 و R_2 و یک ناحیه‌ی بی‌کران R_3 را داریم.



مرز R_1 دقیقاً شامل 3 یال است. پس $\deg(R_1) = 3$.

در محاسبه‌ی مرز R_2، یال v_4v_7 را باید 2 بار حساب کنیم زیرا اگر بخواهید مرز R_2 را طی کنید، نیاز به یک رفت و برگشت روی این یال دارید.

برای مثال مرز R_2 را می‌توان به این صورت طی کرد: $v_1v_2v_4v_7v_4v_5v_6v_1$

پس $\deg(R_2) = 7$ است.

مرز ناحیه‌ی R_3 هم به این صورت طی می‌شود: $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$
پس $\deg(R_3) = 6$ است.
به بیان ساده‌تر: در محاسبه‌ی درجه‌ی یک ناحیه، یال‌هایی که در تماس با آن ناحیه هستند را می‌شماریم و اگر یالی از هر دو طرف با آن ناحیه در تماس باشد باید 2 بار شمرده شود.
یک نتیجه ساده از تعریف درجه‌ی نواحی آن است که مجموع درجات همه نواحی، 2 برابر تعداد یال‌ها است:

$$\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i) = 2e$$

اکنون می‌خواهیم با استفاده از این تساوی، یکی از ویژگی‌های گراف مسطح همبند را شناسایی کنیم. اگر گراف G حداقل 3 رأس داشته باشد $(n \geq 3)$ آنگاه کوچکترین ناحیه‌ی ممکن، یک مثلث است. بنابراین درجه‌ی هر ناحیه، حداقل 3 است. یعنی $\deg(R_i) \geq 3$ است. توجه داشته باشید که در گراف $v_1 \overset{R_1}{\text{———}} v_2$ فقط یک ناحیه‌ی بی‌کران داریم که هر دو طرف یال در آن قرار دارند و در این حالت $\deg(R_1) = 2$ می‌شود. با این حال ما شرط کردیم که گراف G حداقل 3 رأس داشته باشد، بنابراین می‌توانیم مطمئن باشیم که در این گراف درجه‌ی هر ناحیه، بزرگتر یا مساوی 3 است. حالا طبق نتیجه‌ی قبل داریم:

$$2e = \sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)$$
$$\Rightarrow\ 2e = \deg(R_1) + \ldots + \deg(R_r) \geq 3 + 3 + \ldots + 3 = 3r$$
$$\Rightarrow\ 2e \geq 3r \Rightarrow\ 2e \geq 3(e - n + 2)\ \Rightarrow\ e \leq 3n - 6$$

حکم به دست آمده را به این صورت جمع‌بندی می‌کنیم:
قضیه: گراف همبند را در نظر بگیرید. اگر G مسطح باشد آنگاه $e \leq 3n - 6$ است. بنابراین اگر در یک گراف همبند، $e > 3n - 6$ باشد، آن گراف مسطح نیست.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی قبل، نامسطح بودن K_n را برای $n \geq 5$ ثابت کنید.

پاسخ: در گراف K_n، تعداد یال‌ها $e = \frac{n(n-1)}{2}$ است. برای $n \geq 5$ داریم $\frac{n(n-1)}{2} > 3n - 6$
بنابراین $e > 3n - 6$ است و در نتیجه گراف K_n برای $n \geq 5$ نامسطح است.
گفتیم که اگر G همبند باشد و حداقل دارای 3 رأس باشد آنگاه درجه‌ی هر ناحیه، حداقل 3 است (مثلث)، و با استفاده از این مطلب توانستیم شرط $e \leq 3n - 6$ را برای گراف‌های همبند مسطح ثابت کنیم.
اکنون فرض کنید می‌دانیم که G فاقد مثلث است، به عبارتی بدانیم که G دور به طول 3 ندارد. در این صورت کوچکترین ناحیه‌ی ممکن یک چهارضلعی است پس می‌توان گفت $\deg(R_i) \geq 4$ است. با استفاده از این نامساوی داریم:

$$2e = \deg(R_1) + \ldots + \deg(R_r) \geq 4 + 4 + \ldots + 4 = 4r$$
$$\Rightarrow\ 2e \geq 4(e - n + 2)\ \Rightarrow\ e \leq 2n - 4$$

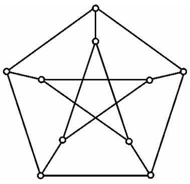
نتیجه: گراف همبند G را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌دانیم که G فاقد دوری بـه طـول 3 اسـت. اگر G مسطح باشد خواهیم داشت $e \leq 2n-4$.

بنابراین اگر بدانید که گراف G فاقد دور به طول 3 است و $e > 2n-4$ باشد آنگاه می‌توانید نتیجه بگیرید که G نامسطح است.

نتیجه: در حالت کلی اگر G همبند باشد و دوری با طول کمتر از m نداشته باشـد آنگـاه نامسـاوی $2e > m(e-n+2)$ نشان می‌دهد که G نامسطح است.

مثال: با استفاده از نتیجه فوق ثابت کنید که گراف پترسن نامسطح است.

پاسخ: گراف پترسن همبند اسـت و دور بـه طـول کمتـر از $m=5$ ندارد. در این گراف تعداد رئوس $n=10$ و تعداد یال‌ها $e=15$ اسـت پـس $2e > 5(e-n+2)$ اسـت. ایـن نامساوی نشان می‌دهد که گراف پترسن نامسطح است.

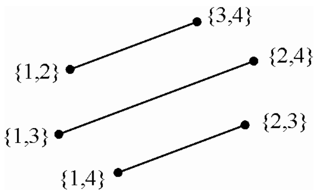


گراف اشتراکی

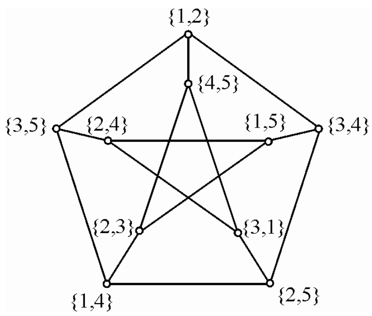
مجموعه‌ی N عضوی X را در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه‌هـای 2 عضـوی X را یـک رأس بـرای گراف G تصور کنید. تعداد این رئوس برابر با $n=\binom{N}{2}$ است.

حالا فرض کنید دو رأس مانند A و B به شرطی مجاورند که $A \cap B = \varnothing$ باشد. چنـین گرافـی را یک گراف اشتراکی می‌نامیم.

مثال: به ازای $X=\{1,2,3,4\}$، گراف G به این صورت خواهد بود:



مثال: به ازای $X=\{1,2,3,4,5\}$، گراف G همان گراف مشهور پترسن است:



نکات تکمیلی گراف اشتراکی

فرض کنیم $X = \{1,2,...,N\}$ و G گراف اشتراکی تشکیل شده با زیرمجموعه‌های 2 عضوی X باشد.

– تعداد رئوس G برابر است با $|V| = \binom{N}{2}$.

– اگر رأس $v = \{1,2\}$ را در نظر بگیرید، این رأس فقط با رئوسی مجاور است که زیرمجموعه‌ی 2 عضوی $\{3,4,...,N\}$ باشند. پس $\deg(v) = \binom{N-2}{2}$ است.

– به این ترتیب گراف G گرافی منتظم است که درجه همه رئوس آن $\binom{N-2}{2}$ است.

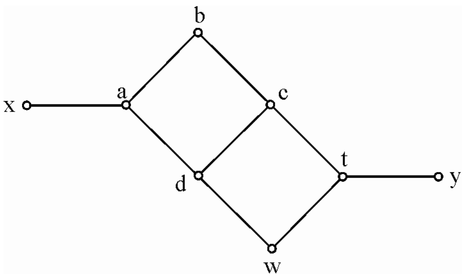
– تعداد یال‌ها برابر است با مجموع درجات، تقسیم بر 2 در نتیجه: $e = \frac{1}{2}\binom{N}{2}\binom{N-2}{2}$

– به ازای هر 3 مجموعه مجزا مانند $\{1,2\}$، $\{3,4\}$ و $\{5,6\}$ یک مثلث در G ایجاد می‌شود. به همین دلیل تعداد مثلث‌ها در گراف اشتراکی G برابر است با $\frac{1}{3!}\binom{N}{2,2,2}$.

– گراف G برای $N \geq 5$، نامسطح است، برای $N \geq 8$ همیلتونی است، و برای $N \geq 6$ به شرط آن که $N = 4K+3$ یا $N = 4K+2$ باشد، اویلری است.

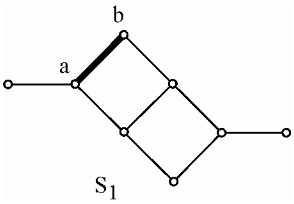
تطابق Matching

گراف ساده‌ی G را مطابق شکل در نظر بگیرید:



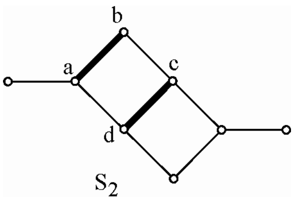
مجموعه‌ای از یال‌های G را یک تطابق می‌نامیم هرگاه آن یال‌ها هیچ رأس مشترکی نداشته باشند. برای مثال مجموعه‌ی $S = \{xa, tw\}$ یک تطابق است زیرا یال‌های انتخاب شده در S، هیچ رأس مشترکی ندارند. اما مجموعه‌ی $H = \{xa, tw, ct\}$ یک تطابق نیست زیرا یال‌های tw و ct در رأس t با هم اشتراک دارند.

اکنون به تطابق‌های زیر و توضیحات مربوط به هر کدام توجه کنید:

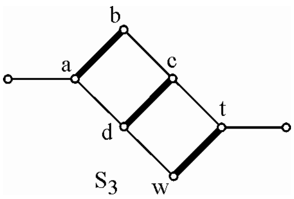


$S_1 = \{ab\}$ یک تطابق است که فقط از یـک یـال تشـکیل شده است. در واقع هر مجموعه‌ی تک عضـوی از یـال‌هـا، یک تطابق است.

آیا می‌توانید یک یال دیگر به S_1 اضافه کنید طوری که تطابق بودن آن حفظ شود؟ کافیسـت یـالی را انتخاب کنیم که با رئوس a و b در تماس نباشد.

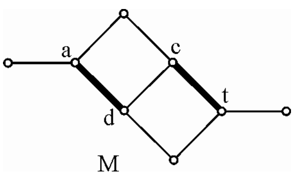


مثلاً $S_2 = \{ab, cd\}$ یک تطابق است و $S_1 \subset S_2$، S_2 یک تطابق 2 عضوی است. آیا می‌توانید یک یال دیگـر بـه S_2 اضافه کنید تا تطابق بزرگتری به دست آید؟



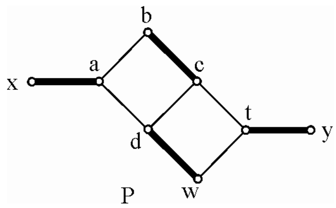
کافیست یالی را انتخاب کنید که بـا رئـوس a، b، c و d در تماس نباشد. مثلاً با اضافه کـردن یـال tw مـی‌تـوانیم یـک تطابق بزرگتر به دست آوریم.
$S_3 = \{ab, cd, tw\}$ یـــک تطـــابق 3 عضـــوی اســـت و $S_2 \subset S_3$.

آیا می‌توانید با اضافه کردن یک یال دیگر به S_3، تطابق بزرگتری پیدا کنید؟
با کمی بررسی متوجه می‌شوید که دیگر هیچ یالی نمی‌توان به S_3 اضافه کرد.



S_3 را یک تطـابق ماکزیمـال مـی‌نامنـد. تطـابق ماکزیمـال، تطابقی است که نمی‌توان با اضافه کـردن یـک یـال بـه آن، تطابق بزرگتری به وجود آورد.

اکنون به مجموعه‌ی $M = \{ad, ct\}$ از یال‌ها توجه کنید.
M یک تطابق 2 عضوی است. آیا می‌توانید یک یال به M اضافه کنید و تطابق بزرگتری بـه وجـود آورید؟ می‌بینید که این کار ممکن نیست. در واقـع M هـم یـک تطـابق ماکزیمـال اسـت. نحـوه‌ی انتخاب یال‌ها در M به گونه‌ای بوده است که با آن که فقط 2 یال دارد، دیگر قابل گسترش نیست.
پس می‌بینید که هم S_3 و هم M هر دو تطابق‌های ماکزیمال هستند با آن که یکی از آنها 3 عضوی و دیگری 2 عضوی است.
اکنون به یک پرسش تازه فکر کنید: آیا می‌توانید یال‌های یک تطابق را طوری انتخاب کنیـد کـه از همه رئوس استفاده کرده باشید؟
در این گراف، بهترین انتخاب برای ایجاد یک تطابق که همه‌گیر باشد به این صورت است:



$P = \{ax, bc, dw, ty\}$

بررسی کنید که P یک تطابق است. در ضمن P یک تطابق ماکزیمال است زیرا دیگر نمی‌توان یـال جدیدی به آن افزود.

علاوه بر این‌ها، P دارای این ویژگی است که در آن از همه‌ی رئوس گراف استفاده شـده اسـت. P را یک تطابق تام (کامل) می‌نامند.

همه‌ی گراف‌ها لزوماً دارای تطابق تام نیستند. به عنوان نمونه اگر تعداد رئوس گـراف، فـرد باشـد، واضح است که تطابق تام نخواهد داشت. زیرا در تطابق تام، هر یال نماینده‌ی یک جفت از رئـوس محسوب می‌شود.

فرمول‌های مهم شمارشی

می‌خواهیم تعداد مسیرهای به طول k، تعداد دورهای به طول‌های k، و تعداد تطابق‌های k عضـوی را در چند گراف مشهور بررسی کنیم:

ابتدا دو مسئله مقدماتی مطرح می‌کنیم که نقش مهمی در فهمیدن فرمول‌های بعدی دارند.

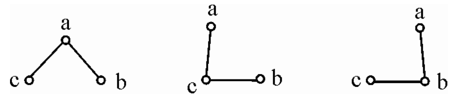
مسئله اول: $k+1$ نقطه‌ی $a_1,...,a_{k+1}$ در اختیار دارید. به چند طریق می‌توانید یک مسیر سـاده بـه طول k بین آنها ایجاد کنید؟

پاسخ: برای شروع $k+1$ انتخاب داریم. مثلاً می‌توانیم از a_1 یا از a_2 یا ... آغاز کنیم. فرض کنیـد می‌خواهیم از a_1 آغاز کنیم. برای نقطه‌ی بعدی k انتخاب داریم. به همین ترتیب هـر بـار یکـی از انتخاب‌هایمان کم می‌شود. با ضرب تعداد انتخاب‌ها $(k+1)!$ به دست می‌آید.

حالا باید جواب به دست آمده را تقسیم بر 2 کنیم زیرا هر مسیر را دو جور می‌تـوان طـی کـرد. از اول به آخر یا از آخر به اول. پس ما هر مسیر را 2 بار شمرده‌ایم و لازم است جوابمان بر 2 تقسـیم شود.

نتیجه: اگر $k+1$ نقطه در اختیار داشته باشید و استفاده از همه یال‌ها مجاز باشد، تعـداد مسـیرهای به طول k برابر با $\frac{(k+1)!}{2}$ است.

مثلاً تعداد مسیرهای به طول 2 که با استفاده از 3 نقطه می‌توان رسم کرد $3 = \frac{3!}{2}$ مسیر است:



مسئله دوم: فرض کنید k نقطه‌ی $a_1,a_2,\dots,a_k$ در اختیار دارید. تعداد دورهای به طول k که با این رئوس می‌توان ساخت چقدر است؟

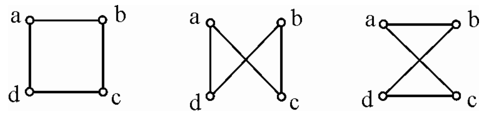
پاسخ: باید از یکی از رئوس آغاز کنیم. k انتخاب داریم. فرض کنید مثلاً از a_1 آغاز کنیم برای رأس دوم، $k-1$ انتخاب داریم. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و در آخرین گام مجبوریم به a_1 برگردیم، (یک انتخاب). به این ترتیب با استفاده از قاعده‌ی ضرب به $k!$ حالت می‌رسیم.

اما این جواب را باید بر $2k$ تقسیم کنیم. زیرا هر دور به طول k را می‌توان از هر رأس آن در 2 جهت مختلف طی کرد. پس هر دور به طول k را ما 2k بار شمرده‌ایم. باید جواب را بر 2k تقسیم کنیم تا حالات تکراری از بین بروند.

نتیجه: اگر k نقطه داشته باشیم و استفاده از همه یال‌ها مجاز باشد، تعداد دورهای به طول k برابر با $\frac{k!}{2k}=\frac{(k-1)!}{2}$ است.

مثال: با داشتن 4 نقطه، 3 دور به طول 4 می‌توان ساخت:

$$\frac{(4-1)!}{2}=\frac{3!}{2}=3$$



حالا با ایده گرفتن از دو مثال قبل می‌توانیم فرمول‌های شمارشی زیر را استخراج کنیم:

۱) تعداد کل مسیرهای به طول m در گراف k_n برابر با $\binom{n}{m+1}\frac{(m+1)!}{2}=\frac{1}{2}P(n,m+1)$ است.

توضیح: برای تشکیل مسیری به طول m ابتدا $m+1$ گره را انتخاب می‌کنیم. سپس با استفاده از این $m+1$ گره می‌توان $\frac{(m+1)!}{2}$ مسیر مختلف به طول m ساخت.

توجه: $\binom{n}{m+1}\frac{(m+1)!}{2}=\binom{n}{2}P(n-2,m-1)$

۲) تعداد مسیرهای به طول m که بین دو رأس v_i و v_j از گراف k_n وجود دارد، برابر با $P(n-2,m-1)$ است.

۳) تعداد دورهای به طول m در گراف k_n برابر با $\binom{n}{m}\frac{(m-1)!}{2}=\frac{1}{2m}P(n,m)$ است.

توضیح: ابتدا m گره از بین n گره انتخاب می‌کنیم. حالا با استفاده از m گره می‌توان $\frac{(m-1)!}{2}$ دور به طول m ایجاد کرد.

توجه: دورهای همیلتونی در گراف k_n همان دورهای به طول $m=n$ هستند. پس تعداد دورهای همیلتونی در این گراف برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است.

۴) در گراف دو بخشی $k_{n,m}$ فقط دورهای به طول زوج وجود دارد. تعداد دورهای به طول $2k$ در این گراف برابر با $\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!(k-1)!}{2}$ است.

توضیح: ابتدا k گره از بخش n عضوی و k گره از بخش m عضوی انتخاب می‌کنیم. اکنون با استفاده از این $2k$ گره می‌توان $\frac{k!(k-1)!}{2}$ دور ایجاد کرد.

توجه: گراف $k_{n,m}$ به شرطی دور همیلتونی دارد که $n=m$ باشد. در گراف $k_{n,n}$ هر دور همیلتونی، یک دور به طول $2n$ است. بنابراین تعداد دورهای همیلتونی در $k_{n,n}$ برابر است با:

$$\binom{n}{n}\binom{n}{n}\frac{n!(n-1)!}{2}=\frac{n!(n-1)!}{2}$$

۵) تعداد تطابق‌های k عضوی (تطابق‌های دارای k یال) در گراف k_n برابر با $\frac{n!}{k!2^k(n-2k)!}$ است.

توضیح: برای مثال فرض کنید می‌خواهیم تطابق‌های 3 یالی در گراف k_n را بشماریم. تعداد کل یال‌ها $\frac{n(n-1)}{2}$ است. فرض کنید یال $e_1=(a,b)$ را انتخاب کنیم. اکنون باید رئوس a و b و همه یال‌های مرتبط با آنها را کنار بگذاریم. پس گراف k_{n-2} باقی می‌ماند که دارای $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ یال است. یکی از آنها را انتخاب می‌کنیم. مثلاً فرض کنید یال $e_2=(c,d)$ را انتخاب کرده باشیم. اکنون باید رئوس c و d و همه یال‌های مرتبط با آنها را کنار بگذاریم پس گراف k_{n-4} باقی می‌ماند که دارای $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ یال است. یال e_3 را از بین آنها انتخاب می‌کنیم.

با استفاده از قاعده‌ی ضرب به حاصل‌ضرب $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-5)}{2\times2\times2}$ می‌رسیم. اما هر تطابق 3 عضوی را ممکن است به $3!$ حالت، شمرده باشیم (یعنی ترتیب انتخاب e_1 ، e_2 و e_3، دارای $3!$ حالت است.)

ما نمی‌خواهیم این تطابق را 6 بار شمرده باشیم. پس جواب را بر $3!$ تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب می‌بینیم که تعداد تطابق‌های 3 عضوی در k_n برابر با $\frac{n(n-1)...(n-5)}{3!\times2^3}=\frac{n!}{3!2^3(n-6)!}$ است.

توجه: گراف k_n فقط به شرطی تطابق کامل دارد که $n=2k$ زوج باشد. هر تطابق کامل دارای $k=\frac{n}{2}$ یال است. پس تعداد تطابق‌های کامل (تام) در گراف k_n برابر با است با:

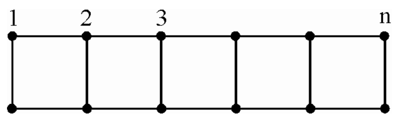
$$\frac{(2k)!}{2^k k!} = (1)(3)(5)...(2k-1)$$

۶) تعداد تطابق‌های k عضوی (دارای k یال) درگراف $k_{n,m}$ برابر با $\binom{n}{k}\binom{m}{k}k!$ است.

توضیح: ابتدا باید k گره از بخش n عضوی و k گره از بخش m عضوی انتخاب کنیم. سپس به $k!$ حالت می‌توان این دو مجموعه k عضوی را به k جفت مجزا تبدیل کرد.

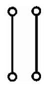
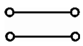
توجه: گراف $k_{n,m}$ فقط وقتی تطابق کامل دارد که $n = m$ باشد. در این صورت هر تطابقی که تعداد یال‌هایش $n = k$ باشد یک تطابق کامل است. بنابراین تعداد تطابق‌های کامل در گراف $k_{n,n}$ برابر با $\binom{n}{n}\binom{n}{n}n! = n!$ است.

۷) تعداد تطابق‌های کامل در گراف نردبانی:



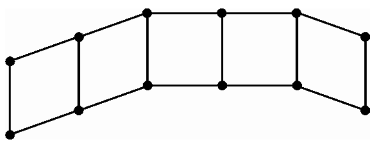
فرض کنید G گرافی نردبانی (مطابق شکل) است که رئوس ردیف بالایی آن را با شماره‌های $1,2,...,n$ نامگذاری کرده‌ایم.

به ازای $n = 1$ فقط یک تطابق کامل داریم که به صورت  است.

به ازای $n = 2$ دو تطابق کامل داریم که  و  هستند.

برای هر $n \geq 3$، با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی فیبوناتچی یعنی $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ می‌توانیم تعداد تطابق‌های کامل را تعیین کنیم. البته مقادیر اولیه‌ی $F_1 = 1$ و $F_2 = 2$ را در نظر داشته باشید.

مثال: گراف G چند تطابق کامل دارد؟



۱) 21

۲) 13

۳) 64

۴) 32

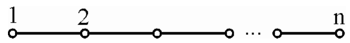
پاسخ: یک گراف نردبانی داریم که رئوس ردیف بالایی آن $n = 6$ تا هستند. پس تعداد تطابق‌های کامل برابر با F_6 است.

$$F_1 = 1 \ , \ F_2 = 2 \ , \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

با محاسبه 6 جمله‌ی اول داریم:

$$1,2,3,5,8,13 \ \Rightarrow \ F_6 = 13$$

۸) تعداد تطابق‌های k عضوی در مسیر ساده‌ی P_n برابر با $\binom{n-k}{k}$ است.



توضیح: مسیر ساده‌ی P_n دارای n گره و $n-1$ یال است. می‌خواهیم از بین این $n-1$ یال، k یال را انتخاب کنیم طوری که یال‌های انتخاب شده، مجاور نباشند. تصور کنید یال‌های انتخاب شده قرار است k یال آبی رنگ باشند و سایر یال‌ها روی هم $n-k-1$ یال قرمزرنگ را تشکیل می‌دهند.

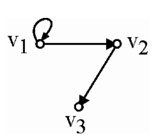
می‌خواهیم یال‌های آبی رنگ کنار هم قرار نگیرند. برای شروع فرض کنید $n-k-1$ یال قرمز را در یک ردیف داریم. قبل، بعد و مابین آنها $n-k$ محل فرضی وجود دارد. از این محل‌ها k تا را انتخاب می‌کنیم و یال‌های آبی را در این محل‌ها قرار می‌دهیم. به همین دلیل تعداد کل حالات ممکن، برابر با $\binom{n-k}{k}$ است.

ماتریس مجاورت

گراف G را با مجموعه‌ی رئوس $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ در نظر بگیرید. ماتریس مجاورت این گراف، یک ماتریس $A_{n\times n}$ است که سطرها و ستون‌های آن نظیر رئوس گراف G هستند. اگر یال (v_i,v_j) در گراف موجود باشد داریم $a_{ij}=1$ و در غیر این صورت $a_{ij}=0$ است.

برای مثال اگر ماتریس مجاورت یک گراف به صورت $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ باشد یال‌های این گراف عبارتند از (v_1,v_1) و (v_1,v_2) و (v_2,v_3) :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \end{array}$$



با توجه به مثال بالا موارد زیر بدیهی هستند:

۱) ماتریس A متقارن نیست $\Leftrightarrow$ گراف G جهت‌دار باشد.

۲) قطر اصلی A همه صفر هستند $\Leftrightarrow$ G دارای طوق نباشد.

۳) مجموع سطر i اُم برابر با درجه‌ی خروجی v_i است.

مجموع ستون i اُم برابر با درجه‌ی ورودی v_i است.

۴) در گراف‌های ساده که غیر جهت‌دار و بدون طوق هستند، ماتریس A یک ماتریس متقارن است، قطر اصلی آن برابر با صفر است و مجموع سطر i اُم با مجموع ستون i اُم برابر بوده و

$\deg(v_i)$ را نشان می‌دهد. در این حالت، مجموع همه‌ی درایه‌های A، همان مجموع همه‌ی درجات است پس با 2 برابر تعداد یال‌ها برابر می‌شود.

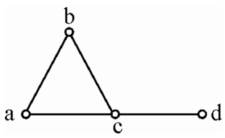
گراف ساده باشد $G \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$

ماتریس A^k و کاربرد آن

در ماتریس A وقتی $a_{ij} = 1$ است یعنی می‌توان با یک گام از v_i به v_j رسید و هنگامی که $a_{ij} = 0$ باشد، یعنی نمی‌توان با یک گام از v_i به v_j رسید. اکنون ماتریس $A^k = \underbrace{AA \ldots A}_{\text{بار } k}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید b_{ij} نشان‌دهنده‌ی درایه‌های سطر i و ستون j از ماتریس A^k باشد. b_{ij} برابر است با تعداد کل راه‌ها (walk) برای رسیدن از رأس v_i به v_j در صورتی که دقیقاً k گام برداریم:

$A^k = (b_{ij})_{n\times n} \Rightarrow b_{ij} =$ (تعداد کل راه‌ها (گشت‌ها)ی به طول k از v_i به v_j)

مثال: برای گراف G، ماتریس A^3 را به دست آورید. (A ماتریس مجاورت است).



$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a, b, c, d)$

پاسخ: ماتریس مجاورت این گراف چنین است:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای نوشتن ماتریس A^3 یک راه آن است که ماتریس A را 3 بار در خودش ضرب کنیم یعنی $A^3 = AAA$. همچنین می‌توانیم از مفهوم A^3 استفاده کنیم:

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای مثال در ماتریس A^3، درایه‌ی سطر سوم و ستون دوم یعنی $b_{32} = 4$ است یعنی اگر بخواهیم

با دقیقاً 3 گام از رأس c به رأس b برویم، برای این کار 4 روش وجود دارد. ایـن گشـت‌هـا را در اینجا لیست کرده‌ایم: cdcb , cacb , cbcb , cbab

یک نکته‌ی بسیار مهم در مورد قطر اصلی ماتریس A^3 وجود دارد.

درایه‌ی b_{ii} که روی قطر اصلی قرار دارد، تعداد گشت‌های به طول 3 را که از رأس v_i آغاز شده و به رأس v_i ختم می‌شوند را نشان می‌دهد. اگر خوب دقت کنید، هر گشت به طول 3 که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، یک مثلث (دور به طول 3) خواهد بود.

مثلاً اولین درایه‌ی قطر اصلی در مثال بالا، $b_{11} = 2$ است زیرا به 2 طریق می‌شود از a به a رسـید و دقیقاً 3 گام برداشت: acba و abca . همچنین درایه‌ی دوم روی قطر اصلی یعنی $b_{22} = 2$ است زیرا دقیقاً به 2 طریق می‌شود از b به b رسید و دقیقاً 3 گام برداشت: bacb و bcab .

درایه‌ی سوم روی قطر اصلی هم $b_{33} = 2$ است که نشان‌دهنده‌ی گشت‌های cabc و cbac است.

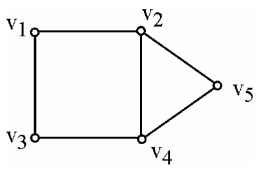
اما همه‌ی این گشت‌های به طول 3 در واقع همان مثلث تشکیل شده از رئوس a و b و c را نشـان می‌دهند. ما این مثلث را 6 بار شمرده‌ایم. با این توضیحات می‌توانیم نتیجه مهم زیر را بگیریم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها در گراف ساده G} = \frac{A^3 \text{ مجموع قطر اصلی ماتریس}}{6} = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3)$$

در مثال بالا داریم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3) = \frac{1}{6}(2+2+2+0) = 1$$

مثال: در گراف G، درایه‌ی سطر سوم و ستون سوم ماتریس A^4 کدام است؟



۱) 1

۲) 2

۳) 7

۴) 9

پاسخ: باید ببینیم چند راه برای رسیدن از v_3 به v_3 وجـود دارد کـه در آن دقیقـاً 4 گـام برداشـته باشیم.

$\left.\begin{matrix} v_3v_4v_3v_4v_3 \\ v_3v_1v_3v_1v_3 \end{matrix}\right\}$ 2 تا از آنها با رفت و برگشت روی یک یال به دست می‌آیند:

$\left.\begin{matrix} v_3v_4v_2v_1v_3 \\ v_3v_1v_2v_4v_3 \end{matrix}\right\}$ 2 تا از آنها با حرکت روی یک مربع به دست می‌آیند:

$\left.\begin{matrix} v_3v_1v_2v_1v_3 \\ v_3v_4v_2v_4v_3 \\ v_3v_4v_5v_4v_3 \end{matrix}\right\}$ 3 تا از آنها با رفت و برگشت روی دو یال متوالی به دست می‌آیند:

2 تا از آنها با استفاده از هر دو یال مجاور با v_3 انجام می‌شوند: $\left.\begin{matrix} v_3v_4v_3v_1v_3 \\ v_3v_1v_3v_4v_3 \end{matrix}\right\}$

بنابراین تعداد کل این گشت‌ها 9 تا است.

مثال: ماتریس $A_{5\times5}$ ماتریس مجاورت گراف ساده‌ی G است. اگر A^3 به صورت زیر باشد، گراف G چند دور به طول 3 خواهد داشت؟

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) 6

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

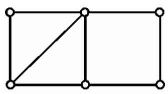
$$\text{تعداد دورهای به طول 3} = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(A^3) = \frac{1}{6}(0+2+2+0+2) = 1$$

توجه: در گراف ساده‌ی G عناصر روی قطر اصلی ماتریس A^2 نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی رئوس هستند، زیرا برای آن که با دو گام از v_i به v_i برسید ناچار هستید از رفت و برگشت روی یال‌های مرتبط با v_i استفاده کنید.

به همین علت، مجموع همه‌ی عناصر قطر اصلی A^2 برابر با مجموع درجات گراف است به عبارتی داریم:

$$A^2 \text{ مجموع قطر اصلی} = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$$

مثال: گراف ساده‌ی G داده شده است. اگر A ماتریس مجاورت این گراف باشد، $\operatorname{tr}(A^2)$ و $\operatorname{tr}(A^3)$ به ترتیب کدامند؟


G

۱) 14 و 12
۲) 16 و 12
۳) 8 و 16
۴) 8 و 14

پاسخ:

$$\operatorname{tr}(A^2) = \text{مجموع درجات رئوس} = 2e = 2\times8 = 16$$

$$\operatorname{tr}(A^3) = 6\times (\text{تعداد مثلث‌ها}) = 6\times2 = 12$$

سؤالات طبقه‌بندی شده فصل هشتم: گراف‌ها

۱- در گرافی $3-$ منظم n رأسی و m یالی داریم $2m+6n=90$ در این صورت تعداد رئوس برابر است با: (علوم کامپیوتر - ۸۶)

۱) 6 ۲) 8 ۳) 10 ۴) 12

۲- فرض کنید $G(V,E)$ گرافی بدون جهت با n رأس و e یال باشد. قرار می‌دهیم $\delta=\min_{v\in V}\{\deg(v)\}$ و $\Delta=\max_{v\in V}\{\deg(v)\}$. در این صورت تعداد رئوس برابر است با: (IT- ۸۶)

۱) $\delta\le\left(\frac{e}{n}\right)\le\Delta$ ۲) $\delta\le 2\left(\frac{e}{n}\right)\le\Delta$ ۳) $2\delta\le\left(\frac{e}{n}\right)\le 2\Delta$ ۴) $3\delta\le 2\left(\frac{e}{n}\right)\le 4\Delta$

۳- اگر m تعداد رئوس درجه زوج در یک گراف ساده باشد و تعداد کل رئوس این گراف فرد باشد، باقیمانده تقسیم m^2 بر 8 کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) 7 ۴) 3

۴- فرض کنید G یک گراف باشد و تعداد همسایه‌های مشترک هر دو رأس G فرد باشد، در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (علوم کامپیوتر - ۸۹)

۱) درجه هر رأس G زوج است.
۲) تعداد رئوس G مضرب 3 است.
۳) تعداد رئوس G زوج است.
۴) گراف G تعداد فردی یال دارد.

۵- کدامیک از دنباله‌های زیر دنباله درجات گراف ساده است؟ (علوم کامپیوتر - ۸۰)

۱) $5,4,4,3,3,2,2$
۲) $5,4,4,4,2,1$
۳) $4,3,2,1,1,1,1,1$
۴) $7,5,4,4,2,2,1,1$

۶- فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)=\{A\,|\,A\subseteq\{1,2,3,4,5,6\},|A|=2\}$ باشد. دو رأس A و B متصل هستند اگر $A\cap B=\phi$. گراف G چند مثلث دارد؟ (علوم کامپیوتر - ۸۴)

۱) 15 ۲) 30 ۳) 45 ۴) 90

۷- در یک سیمنار علمی 37 نفر حضور دارند که در ابتدا هر مدعو با تک‌تک بقیه مدعوین به طور دلخواه یا دست می‌دهد یا دست نمی‌دهد. کدام گزاره صحیح است؟ (سراسری - ۷۹)

۱) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد زوج دست داده‌اند، زوج است.
۲) حداقل دو نفر در این جلسه هستند که به تعداد مساوی دست داده‌اند.

۳) در این جلسه تعداد کسانی که به تعداد فرد دست داده‌اند، فرد است.

۴) هیچ‌کدام

۸- فرض کنید G گرافی با n رأس و e یال باشد. اگر $n \le e$ آنگاه G .... (علوم کامپیوتر – ۷۹)

۱) همبند است. ۲) اویلری است.

۳) رأس درجه یک دارد. ۴) شامل حداقل یک دور است.

۹- اگر G یک گراف ساده 100 رأسی و 100 یالی باشد، کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۵)

۱) G دقیقاً یک دور یکتا دارد.

۲) تعداد دورهای G همواره بزرگتر یا مساوی یک است.

۳) G حداقل یک رأس از درجه بزرگتر یا مساوی 2 دارد.

۴) تعداد رئوس با درجه فرد در G زوج است.

۱۰- کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۴)

۱) برای هر $n > 2$ گرافی n رأسی وجود دارد که هم هامیلتونی و هم اویلری است.

۲) هر گرافی که هم اویلری و هم هامیلتونی باشد حتماً منظم است.

۳) هر گراف 3 منظم اویلری است.

۴) هر گراف 3 منظم هامیلتونی است.

۱۱- گراف ساده G با 10 رأس و 15 یال داده شده است که 5 رأس آن درجه یک هستند کدام گزینه صحیح نیست؟ (علوم کامپیوتر – ۸۴)

۱) ماکزیمم درجه گراف بزرگتر یا مساوی پنج است.

۲) گراف G، دوازده دور پنج‌تایی دارد.

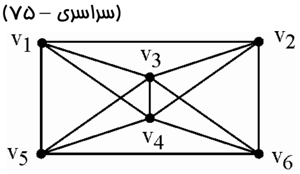
۳) گراف G، ده دور سه تایی دارد.

۴) گراف G، شانزده دور چهار تایی دارد.

۱۲- در گراف کامل k_9 اگر از یک رأس شروع کنیم، چند سیکل (دور) همیلتونی مختلف وجود دارد؟ (سراسری – ۷۹)

۱) $8!$ ۲) $\frac{9!}{16}$ ۳) $\frac{9!}{8}$ ۴) $\frac{9!}{18}$

۱۳- گراف زیر مفروض است: (سراسری – ۷۵)



۱) گراف همیلتونی و اولری است.

۲) همیلتونی است و حداقل یک مسیر اولری دارد.

۳) اولری است و حداقل یک مسیر همیلتونی دارد.

۴) اولری است ولی همیلتونی نیست.

۱۴- فرض کنید k_{16} یک گراف غیرجهت‌دار باشد. کدامیک از عبارات زیر در مورد k_{16} صادق است؟ (سراسری – ۷۴)

۱) هم مدار اولری دارد و هم همیلتونی

۲) نه مدار اولری دارد و نه مدار همیلتونی

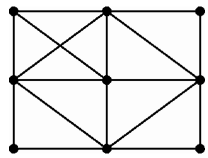
۳) مدار همیلتونی دارد ولی اولری ندارد.

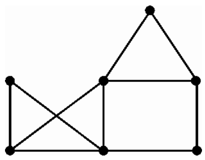
۴) مدار اولری دارد ولی همیلتونی ندارد.

۱۵- گراف .... همیلتونی نیست. (علوم کامپیوتر – ۷۹)

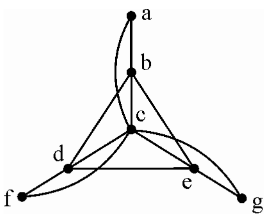
۱) گراف کامل k_{10}

۲) گراف دو بخشی $k_{7,8}$

۳)


۴)


۱۶- گراف $G(V,E)$ نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. کدامیک از عبارت‌های زیر در مورد گراف مزبور صادق است؟ (سراسری– ۷۳)



۱) G هم دارای مدار اولری است و هم دارای مدار همیلتونی

۲) G مدار اولری دارد؛ ولی شامل مدار همیلتونی نیست.

۳) G مدار همیلتونی دارد؛ ولی شامل مدار اولری نیست.

۴) G نه دارای مدار اولری است و نه مدار همیلتونی.

۱۷- تعداد دورهای همیلتونی در گراف دو بخشی کامل $k_{n,n}\ (n \geq 1)$ برابر است با .... (علوم کامپیوتر – ۸۱)

۱) $\frac{n!}{2}$

۲) $n!(n-1)!$

۳) $\frac{1}{2}(n-1)!n!$

۴) $(n+1)!n!$

۱۸-اگر G گرافی 1386 رأسی باشد و دو رأس u و v موجود باشند که فاصله‌شان 1385 باشد در این صورت تعداد یال‌های G برابر است با: (علوم کامپیوتر – ۸۶)

۱) 1385

۲) 1386

۳) 1387

۴) 1388

۱۹- در یک کارگاه آموزش 37 نفر از شرکت‌کنندگان هر روز پشت یک میز دایره‌ای شکل تشکیل جلسه می‌دهند. آن‌ها مایل هستند یکدیگر را بهتر بشناسند. لذا هر نفر مجاور دو نفر که در

روزهای قبل نشسته است نمی‌نشیند برای چند روز باید به این طریق عمل شود قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم مجاور هم نشسته باشند؟ (علوم کامپیوتر – ۸۱)

۱) 37 روز ۲) 19 روز ۳) 36 روز ۴) 18 روز

۲۰- کدامیک از گزینه‌های زیر برای یک گراف ساده همبند صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۸)

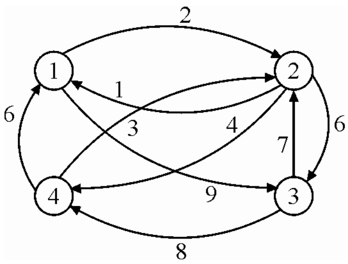
۱) هر گراف با دقیقاً دو دور اویلری است.

۲) در هر گراف با دقیقاً دو دور درجه هر رأس 4 است.

۳) یک گراف n رأسی دارای $n+1$ یال است اگر و تنها اگر دقیقاً دو دور داشته باشد.

۴) در هر گراف با دقیقاً دو دور، بین هر دو رأس متمایز حداکثر 4 مسیر متمایز وجود دارد.

۲۱- دیاگراف وزن‌دار زیر مفروض است. سیکل بهینه همیلتونی در این دیاگراف که از گره شماره 1 شروع می‌شود دارای کدامیک از اوزان زیر می‌باشد؟ (سراسری – ۷۷)



۱) 21

۲) 22

۳) 26

۴) 12

۲۲- گراف بدون جهت بی‌طوقه و n- بخشی کامل $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. اگر تعداد رأس‌های هر بخش i را با P_i نمایش دهیم، تعداد یال‌های G و $\overline{G}$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر – ۸۸)

۱) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_iP_j$ و $\sum_{i=1}^{n}\binom{P_i}{2}$

۲) $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} P_i\frac{P_j}{2}$

۳) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\binom{P_i}{2}\binom{P_j}{2}$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_iP_j$

۴) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} P_i\frac{P_j}{2}$ و $\sum_{i=1}^{n} P_i^2$

۲۳- فرض کنید رئوس گراف G نظیر زیرمجموعه‌های 2 عضوی $\{1,2,3,4,5\}$ باشند، دو رأس در این گراف با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر مجموعه‌های 2 عضوی نظیر آن دو رأس اشتراکشان تهی باشد، کدام گزاره صحیح نیست؟ (علوم کامپیوتر – ۸۲)

۱) گراف G دو بخشی است. ۲) گراف G، 10 رأس دارد.

۳) گراف G شامل 15 یال است. ۴) گراف G همبند است.

۲۴- اگر G گرافی 16 رأسی فاقد مثلث باشد آنگاه حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با ....
(علوم کامپیوتر – ۸۱)

۱) 63 ۲) 62 ۳) 64 ۴) 60

۲۵- چند دور چهار رأسی (C_4) در گراف دو بخشی $k_{7,7}$ به عنوان زیر گراف ظاهر شده است؟
(علوم کامپیوتر- ۸۳)

۱) 441 ۲) 686 ۳) 931 ۴) 1001

۲۶- فرض کنید گراف ساده n رأسی G، دقیقاً n یال داشته باشد. کدام گزاره همیشه برقرار است؟
(علوم کامپیوتر – ۸۳)

۱) G یک رأس با درجه 2 دارد.
۲) G حداقل یک دور است.
۳) G همبند است.
۴) G دو بخشی است.

۲۷- فرض کنید زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1,2,...,n\}(n \geq 1383)$، نظیر رئوس گراف G باشند و دو رأس در گراف G به یکدیگر متصل هستند، اگر اشتراک مجموعه‌های نظیر تهی باشد، کدام گزاره صحیح است؟
(علوم کامپیوتر – ۸۳)

۱) گراف همبند است.
۲) گراف همیلتونی است.
۳) گراف دو بخشی است.
۴) گراف منظم است.

۲۸- کدام گزاره برای گراف همبند G با فقط یک دور همواره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۴)

۱) بین هر دو رأس G حداکثر یک مسیر وجود دارد.
۲) تعداد رئوس درجه یک G حداقل $\Delta(G)-2$ است.
۳) گراف G، با دور n رأسی (C_n) یکریخت است.
۴) تعداد یال‌های G اکیداً بیش از تعداد رأس‌های آن است.

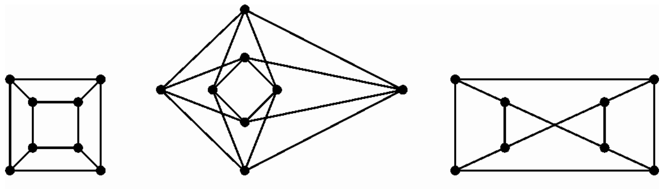
۲۹- گراف دو بخشی کامل $k_{7,7}$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم 4 یال انتخاب کنیم که هیچ دوتایی به هم متصل نباشند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟
(علوم کامپیوتر – ۸۲)

۱) $4\binom{14}{8}$ ۲) $4!\binom{14}{8}$ ۳) $4!^2\binom{7}{4}$ ۴) $4!\binom{7}{4}^2$

۳۰- گراف G روی مجموعه رئوس $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ به این صورت ساخته شده است که $\{x,y\}$ یال G است اگر و تنها اگر $x-y$ به پیمانه 7 یکی از اعضای $\{2,3,4,5\}$ باشد. کدام گزاره نادرست است؟
(علوم کامپیوتر – ۸۶)

۱) G گراف دو بخشی است.
۲) G گرافی 4–منظم است.
۳) G گرافی ساده است.
۴) G گرافی همبند است.

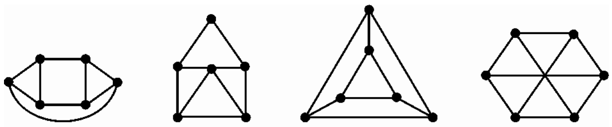
۳۱- کدامیک از گراف‌های زیر دو بخشی است؟



G_1 G_2 G_3

۱) هر سه مورد
۲) فقط G_1 و G_2
۳) G_1 و G_3
۴) G_2 و G_3

۳۲- کدامیک از گراف‌های زیر یک ریخت (Isomorphic) می‌باشند؟ (علوم کامپیوتر – ۸۰)



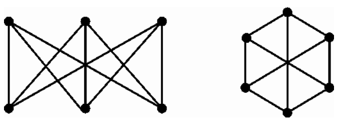
الف ب ج د

۱) ب و د ۲) الف و ب ۳) الف و د ۴) الف و ج

۳۳- فرض کنید G یک گراف n رأسی است؛ به طوری که G با مکملش یکریخت (ایزومورف) است. در این صورت n برابر کدامیک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ (علوم کامپیوتر – ۷۹)

۱) 19 ۲) 31 ۳) 30 ۴) 21

۳۴- دو گراف زیر ایزومورفیک هستند، چه تعداد تابع ایزومورفیسم می‌توان نوشت؟



۱) 36
۲) 72
۳) 48
۴) 96

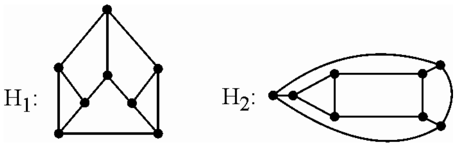
۳۵- کدام گزاره صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۹)

۱) گراف 4 رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکریخت باشد.
۲) گراف 5 رأسی وجود ندارد که مکمل آن با خودش یکریخت باشد.
۳) دقیقاً دو گراف 1388 رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله 1387 است.
۴) دقیقاً یک گراف 1388 رأسی وجود دارد که شامل دو رأس با فاصله 1387 است.

۳۶- کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۸)

۱) هر گراف ساده که در دنباله درجات آن دقیقاً دو عدد ظاهر شود دو بخشی است.
۲) هر گراف ساده 6 رأسی با 10 یال همبند است.
۳) دقیقاً 6 گراف 11 رأسی 8–منتظم غیریکریخت وجود دارد.
۴) گراف ساده 7 رأسی 3–منتظم وجود دارد.

۳۷- دو گراف زیر را در نظر بگیرید:



۱) H_1 و H_2 باهم ایزومورفیک (isomorphic) هستند.
۲) تعداد رئوس با درجه 3 در H_2 بیشتر از H_1 است.
۳) تعداد رئوس با درجه 3 در H_2 کمتر از H_1 است.
۴) H_1 و H_2 باهم ایزومورفیک (isomorphic) نیستند.

۳۸- کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۷)
۱) هر گراف 10 رأس با 37 یال همیلتونی است.
۲) هر گراف 8 رأس 3 منتظم، همبند است.
۳) تعداد گراف‌های 2 منتظم 10 رأس دو به دو غیریکریخت برابر 5 است.
۴) گرافی با دنباله درجات (5,5,4,4,3,3,2,2,1,1) وجود ندارد.

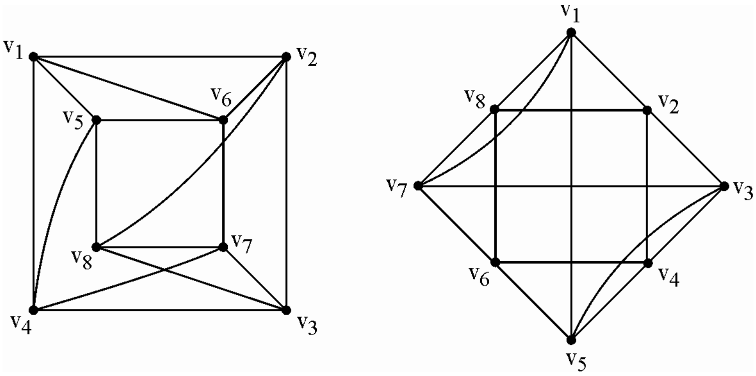
۳۹- کدام گزاره نادرست است؟ (IT – ۸۵)
۱) گراف کامل دو بخشی $k_{3,4}$ مسطح نیست.
۲) اگر $G=(V,E)$ گرافی بدون حلقه و همبند بوده و $|E|>\frac{|V|^2}{4}$، آنگاه G دو بخشی نیست.
۳) اگر G دوره‌ای بر روی n رأس بوده و مکمل آن $\overline{G}$ با G یکریخت (ایزومورف) باشد، آنگاه $n=5$.
۴) گراف بدون حلقه، همبند و بدون جهتی با 8 رأس وجود دارد که درجه رئوس آن $1,1,1,2,3,4,5,7$ است.

۴۰- گراف G روی مجموعه رئوس $\{1,2,3,...,9\}$ به این صورت ساخته شده است که $\{x,y\}$ یال G است اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب $x\times y$ مضرب 3 باشد. کدام گزاره نادرست است؟
(علوم کامپیوتر – ۸۵)

۱) گراف G همیلتونی نیست. ۲) تعداد یال‌های G، 21 تا است.
۳) G مسطح است. ۴) گراف G دو بخشی نیست.

۴۱- دنباله درجه‌ای یک گراف ساده 6 رأسی به ترتیب نزولی به صورت $5,5,4,x,y,2$ است. کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۵)
۱) تعداد یال‌های گراف حداقل 11 است. ۲) این گراف لزوماً مسطح نیست.
۳) لزوماً $x=y$ است. ۴) حاصل‌ضرب $x\times y$ حتماً زوج است.

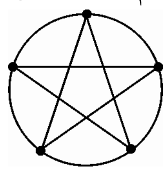
۴۲- گراف‌های G_1 و G_2 مطابق شکل زیر داده شده‌اند: (سراسری – ۸۱)

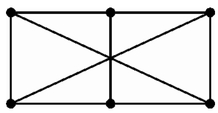


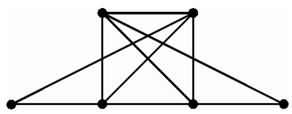
کدام گزینه صحیح است؟

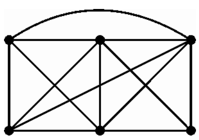
۱) G_1 و G_2 ایزومورف هستند.
۲) G_1 مسطح و G_2 اویلری است.
۳) G_1 اویلری و G_2 مسطح است.
۴) G_1 همیلتونی و G_2 دو بخشی است.

۴۳- کدام گراف هامنی (مسطح) است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۲)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۴- مجموعه رئوس گراف G تمام زیرمجموعه‌های مجموعه 3 عنصری $\{a,b,c\}$ است که رأس A به B وصل است، اگر و فقط اگر اندازه تفاضل متقارن $A\Delta B$ برابر یک باشد ($|A\Delta B|=1$) کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۶)

۱) G اویلری نیست.
۲) G 3 منظم است.
۳) G مسطح نیست.
۴) G همیلتونی است.

۴۵- اگر G گرافی ساده 1385 رأسی باشد و $\Delta(\overline{G})=1382$ کدام گزاره صحیح است؟ (توجه: $\overline{G}$ مکمل گراف G است. Δ بزرگترین درجه رأس گراف می‌باشد.) (علوم کامپیوتر – ۸۶)

۱) G ناهمبند است.
۲) G مسطح است.
۳) G همیلتونی نیست.
۴) G حداقل یک دور دارد.

۴۶- چند مورد از عبارات زیر درست است؟ (۸۹- IT)

A. اگر گراف G همیلتونی باشد و دارای n رأس باشد $(n \geq 3)$ آنگاه درجه هر رأس G حداقل $\frac{n}{2}$ است.

B. اگر گراف G همیلتونی و دارای n رأس باشد $(n \geq 3)$ آنگاه به ازای هر جفت از رأس‌های غیرمجاور u و v داریم $\deg(u)+\deg(v) \geq n$.

C. گرافی که درجه‌ی تمام رأس‌های آن زوج است همواره اویلری است.

D. اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشد پس درجه یک رأس آن کمتر از 5 است.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۴۷- فرض کنید G گرافی 5 رأس و 7 یالی باشد و دنباله درجات آن به صورت نزولی مرتب شده باشند: $(4,4,2,2,x)$

کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

۱) G اویلری است. ۲) G همبند است.

۳) G مسطح است. ۴) G همیلتونی است.

۴۸- کدام‌یک از دنباله درجات زیر می‌تواند دنباله درجات رئوس یک گراف مسطح ساده باشد؟
(علوم کامپیوتر - ۸۸)

۱) $3,3,3,3,3,4,4,4,4,4$ ۲) $4,4,4,4,4,4,4,5,5,6$

۳) $2,3,3,4,6,6,6,6,6,8$ ۴) $6,6,6,6,6,6,7,7,8,8$

۴۹- گراف G با رئوس $\{1,2,...,20\}$ را چنان بسازیم که دو رأس a و b به هم متصل‌اند اگر و تنها اگر $6|ab$ در این صورت داریم: (علوم کامپیوتر - ۸۷)

۱) G همیلتونی است. ۲) $\overline{G}$ ناهمبند است.

۳) G مسطح است. ۴) G دو بخشی است.

۵۰- اگر گراف G در واقع دوری به طول 4 باشد به چند روش مختلف می‌توان رئوس G را با استفاده از حداکثر λ رنگ متفاوت، رنگ‌آمیزی کرد به گونه‌ای که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشد؟ (مهندسی کامپیوتر - ۸۹)

۱) $\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-1$ ۲) $\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda+1$

۳) $\lambda^4+4\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda$ ۴) $\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$

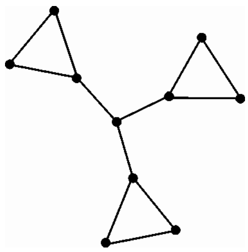
۵۱- چند جمله‌ای رنگی گراف G که آن را با $P(G,\lambda)$ نشان می‌دهیم بیان‌کننده تعداد روش‌های رنگ زدن رئوس گراف G با استفاده از λ رنگ متفاوت است به طوری که هیچ دو رأس

همسایه‌ای همرنگ نباشند. کدامیک از چند جمله‌ای‌های زیر می‌تواند چند جمله‌ای رنگی یک گراف باشد؟ (۸۶ - IT)

۱) $3\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$ ۲) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda$

۳) $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$ ۴) $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 3$

۵۲- به چند طریق می‌توان رأس‌های گراف مقابل را با 3 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. (مهندسی - ۸۶)



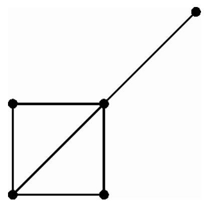
۱) 3×2^3

۲) 3×2^6

۳) 3^3

۴) 2^6

۵۳- فرض کنید G گراف زیر باشد. به چند طریق می‌توان گراف را با k رنگ، رنگ‌آمیزی سره کرد؟ (علوم کامپیوتر - ۸۹)



۱) $k(k-1)^3(2k-5)$

۲) $k^2(k-1)^2(k-2)$

۳) $k(k-1)^2(k-2)^2$

۴) $k(k-1)(k-2)^3$

۵۴- گراف دارای ماتریس همسایگی (adjacencymatrix) زیر: (مهندسی دولتی - ۸۴)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱) یک گراف مسطح، غیرمتصل و با دور است.

۲) یک گراف مسطح، متصل و بدون دور است.

۳) یک گراف مسطح، غیرمتصل و بدون دور است.

۴) یک گراف مسطح، متصل و با دور است.

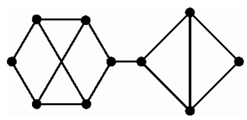
۵۵- فرض کنید G_n یک گراف n رأسی $(n \geq 1384)$ با ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})_{n\times n}$، که در آن، (پیمانه 2) $a_{ij} = i + j$ داده شده باشد. کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - ۸۴)

۱) G_n دو بخشی است. ۲) G_n مسطح است.

۳) G_n منظم است. ۴) G_n همیلتونی است.

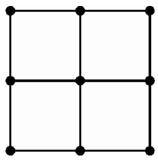
۵۶- فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف زیر باشد. در این صورت مجموع تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس A^2 برابر است با: (علوم کامپیوتر – ۸۸)

۱) 10
۲) 12
۳) 14
۴) 28



۵۷- ماتریس مجاورت گراف زیر را با A نمایش می‌دهیم. اثر A^3 یعنی مجموع اعضای قطری A^3 برابر است با: (علوم کامپیوتر – ۸۷)

۱) 0
۲) 4
۳) 8
۴) 9^3

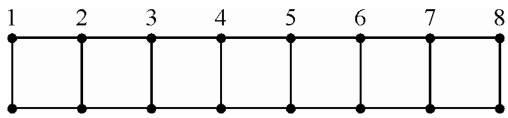


۵۸- تعداد تطابق‌های کامل گراف کامل هشت رأسی k_8 برابر است با........... (علوم کامپیوتر – ۸۱)

۱) 105 ۲) !8 ۳) !7 ۴) 100

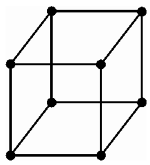
۵۹- تعداد تطابق‌های کامل گراف زیر چندتاست؟ (علوم کامپیوتر – ۸۵)

۱) 32
۲) 33
۳) 34
۴) 35



۶۰- تعداد تطابق‌های کامل در مکعب 3 بعدی برابر است با: (علوم کامپیوتر – ۸۶)

۱) 6
۲) 9
۳) 12
۴) 24



۶۱- گراف بدون جهت $G(V,E)$ را می‌توان با k رنگ، رنگ کرد، اگر بتوان به هر رأس یکی از رنگ‌های 1 تا k را نسبت داد، به طوری که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند، کدام گزینه غلط است؟ (سراسری – ۷۸)

توضیح: گراف دو بخشی گرافی است که در آن V به دو مجموعه A و B افراز شده و هر یال گراف لزوماً یک سر در A و یک سر در B داشته باشد.

۱) هر درخت را می‌توان با دو رنگ، رنگ کرد.

۲) هر گراف کامل را $|V|$ رنگ می‌توان رنگ کرد.

۳) هیچ گراف دارای دور (سیکل) را نمی‌توان با 2 رنگ، رنگ کرد.

۴) هر گراف دو بخشی را می‌توان با 2 رنگ، رنگ کرد.

۶۲- گراف ساده، غیرجهت‌دار و بدون حلقه $G(V,E)$ از ده مولفه همبند که هرکدام یک درخت است، تشکیل شده است. اگر مجموع درجه‌های رئوس گراف G برابر صد باشد، در این صورت تعداد رئوس گراف برابر است با: (سراسری – ۷۶ مشابه سراسری- ۸۱)

۱) 10 ۲) 60 ۳) 50 ۴) 40

۶۳- با سه رنگ آبی، زرد، سبز به چند طریق می‌توان رئوس یک درخت 20 رأسی را رنگ‌آمیزی نمود؛ به طوری که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند؟ (علوم کامپیوتر – ۸۰)

۱) 3×2^{20} ۲) 3×2^{19} ۳) 2×3^{19} ۴) 2×3^{20}

۶۴- درخت T به گونه‌ای است که درجه هر رأس آن یا دقیقاً برابر 4 است و یا یک. اگر درخت مزبور دارای n رأس از درجه 4 باشد. در این صورت تعداد رئوس از درجه یک آن برابر است با: (سراسری – ۷۳)

۱) $2n+2$ ۲) $2n-2$ ۳) $n+1$ ۴) $n-1$

۶۵- درخت T دارای 10 رأس است. تعداد مسیرهای موجود در T با طول حداقل یک چیست؟ (علوم کامپیوتر – ۸۱)

۱) 55 ۲) 100

۳) به نوع درخت بستگی دارد. ۴) 45

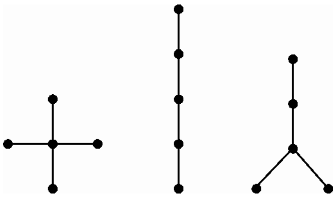
۶۶- فرض کنیم G گرافی 1387 رأسی و فاقد دور باشد و دقیقاً 421 مولفه همبندی داشته باشد. در این صورت تعداد یال‌های آن برابر است با: (علوم کامپیوتر- ۸۸)

۱) 966 ۲) 1000 ۳) 1386 ۴) 2009

۶۷- از گراف کامل k_6 حداکثر چند ضلع می‌توان حذف کرد به طوریکه حاصل همچنان همبند باقی بماند؟ (سراسری – ۷۹)

۱) 7 ضلع ۲) 8 ضلع ۳) 9 ضلع ۴) 10 ضلع

۶۸- تعداد درخت‌های برچسب‌دار با n گره چه تعدادی می‌باشد (فرمول مقدار T_n را پیدا کنید)؟ برای مثال برای $n = 5$ تعداد درخت‌ها 125 است که برخی از آن‌ها در شکل مقابل نشان داده شده است. در ضمن مسیر تهی نیز وجود دارد $(T_0 = 1)$. (IT – ۸۳)



۱) $T_n = n^{n-2}$

۲) $T_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}$

۳) $T_n = 1 + \binom{n}{2} + n + \binom{n}{4}$

۴) $T_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{2k}, \; n \ge 2k$

۶۹- فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار با k مولفه $|V| = n$ و $|E| = m$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد – ۸۱)

۱) $m = n - k$ ۲) $m \le n - k$ ۳) $m \ge n - k$ ۴) هیچکدام

۷۰- فرض کنید P_{10} مسیر 10 رأسی باشد. به چند طریق می‌توان 4 یال از P_{10} انتخاب کرد به طوری که هیچ یک از 4 یال رأس مشترک نداشته باشند؟ (علوم کامپیوتر – ۸۸)

۱) $\binom{6}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{9}{4}$ ۴) $\binom{10}{4}$

۷۱- اگر G یک درخت با دنباله درجات $(4, r, s, 2, t, 1, 1, 1, 1)$ باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (دنباله درجات به صورت غیرصعودی نوشته شده) (علوم کامپیوتر – ۸۷)

۱) $r = s$ ۲) $t = s$ ۳) $r - s = 1$ ۴) $r + t = 4$

۷۲- کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۷)

۱) گرافی که همبند باشد و دور نداشته باشد درخت است.

۲) گرافی همبندی که هر یال آن یک پل باشد درخت است.

۳) گرافی که P رأس و $P-1$ یال و حداقل یک رأس درجه 1 داشته باشد، درخت است.

۴) گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد، درخت است.

۷۳- فرض کنید $(a, b, b, b, c, c, c, c, c, c), a \ge b \ge c$ دنباله درجات یک درخت باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۹)

۱) a و b و c هر سه متمایزند.

۲) فاصله بین هر دو رأس در درخت حداکثر 4 است.

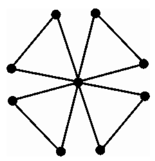
۳) $a \geq b+c$

۴) درختی با دنباله درجات داده شده وجود ندارد.

۷۴- یک درخت 20 رأسی داده شده است که درجه هر رأس غیربرگ آن 3 است. بـه چنـد طریـق می‌توان رأس‌های این درخت را با 4 رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأسـی که فاصله آن‌ها از 2 بیشتر نیست هم‌رنگ نباشند؟ (مهندسی – ۸۷)

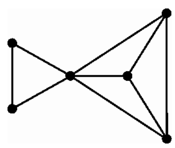
۱) $2^9 \times 3^9$ ۲) $2^9 \times 3$ ۳) $2^{11} \times 3$ ۴) $2^{19} \times 3$

۷۵- تعداد درخت‌های فراگیر شکل مقابل کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۵)



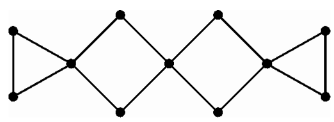
۱) 12
۲) 16
۳) 54
۴) 81

۷۶- تعداد درخت‌های پوشای گراف مقابل چندتاست؟ (دولتی – ۸۲)



۱) 16
۲) 24
۳) 36
۴) 48

۷۷- تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف مقابل کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۸۹)

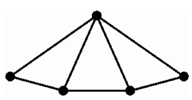


۱) 36
۲) 64
۳) 81
۴) 144

۷۸- تعداد درخت‌های فراگیر (پوشا) برای گراف کامل k_6 که هیچ کدام با دیگری یکریخت نباشـند چندتا است؟ (IT – ۸۹)

۱) 6 ۲) 46656 ۳) 1296 ۴) 36

۷۹- تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف روبه‌رو برابر است با: (علوم کامپیوتر – ۸۶)



۱) 21
۲) 23
۳) 25
۴) 35

۸۰- $k_{2,3}$ چند درخت پوشای غیرایزومورف دارد؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 12

۸۱- در یک درخت دودویی T، برای هر برگ x که در عمق d قرار دارد، تعریف می‌کنیم $W(x) = 2^{-d}$ کدامیک از گزینه‌های زیر مجموع $W(x)$ های هر درخت T را برای همه برگ‌های آن نشان می‌دهد؟ (سراسری – ۷۸)

۱) $\sum_{\text{برگ } x} W(x) \le 1$ ۲) $\sum_{\text{برگ } x} W(x) = 1$ ۳) $\sum_{\text{برگ } x} W(x) < 1$ ۴) $\sum_{\text{برگ } x} W(x) > 1$

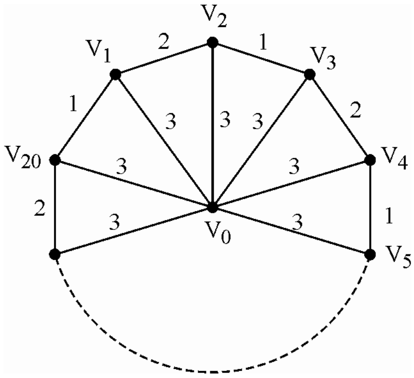
۸۲- تعداد برگ‌های یک درخت دودویی 150 است. حداکثر ارتفاع این درخت چقدر است؟ (سراسری – ۸۰)

۱) 8 ۲) 16 ۳) 50 ۴) 75

۸۳- فرض کنید دنباله درجات گرافی به شکل $(8,4,2,2,2,1,1,1,1)$ باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد این گراف صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۱)

۱) G رأس برشی ندارد.
۲) G دوبخشی است.
۳) G مسطح شدنی است.
۴) G دور 5 تایی دارد.

۸۴- تعداد درخت‌های فراگیر می‌نیمم متمایز در گراف وزن‌دار زیر که دارای 21 رأس می‌باشد کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۱)



۱) 200
۲) 210
۳) 420
۴) $\binom{42}{20}$

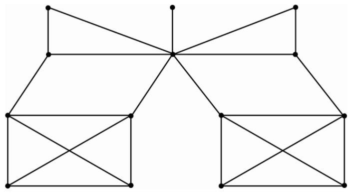
۸۵- فرض کنید رأس‌های یک گراف G بردارهای 0 و 1 با طول 5 باشند، به طوریکه دو رأس به یکدیگر متصل‌اند اگر و تنها اگر دقیقاً در یک مولفه تفاوت داشته باشند. کدام گزینه در مورد گراف G صحیح نمی‌باشد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۱)

۱) G دوبخشی است.
۲) G مسطح است.
۳) G تطابق کامل دارد.
۴) G دارای 80 یال است.

۸۶- کدام گزینه برای گراف G با $n \geq 3$ رأس نادرست است؟ (یال برشی را پل می‌نامیم)
(علوم کامپیوتر – ۹۱)

۱) اگر یال e روی هیچ دوری قرار نداشته باشد، آنگاه e پل است.
۲) اگر گراف G رأس برشی نداشته باشد، آنگاه G پل ندارد.
۳) اگر یال e یک پل از گراف باشد، آنگاه e روی هیچ دوری قرار ندارد.
۴) اگر گراف G پل نداشته باشد، آنگاه G رأس برشی ندارد.

۸۷- تعداد تطابق‌های کامل متمایز در گراف مقابل چقدر است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۱)



۱) 8
۲) 9
۳) 10
۴) 11

۸۸- اگر G یک گراف ساده ناهمبند روی 6 رأس باشد، حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با:
(علوم کامپیوتر – ۹۱)

۱) 12 ۲) 10 ۳) 9 ۴) 6

۸۹- تعداد گراف‌های دو بخشی با حداقل دو رأس که مکمل آن‌ها هم دوبخشی است، چند تاست؟
(علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) 5 ۲) 7 ۳) 8 ۴) 9

۹۰- فرض کنید G گرافی همبند باشد و H یک زیر گراف القایی رأسی از G باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
(علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) قطر G بزرگتر از قطر H است.
۲) قطر H بزرگتر از قطر G است.
۳) ماکزیمم درجه G حداقل برابر ماکزیمم درجه H است.
۴) مینیمم درجه H کوچکتر یا مساوی مینیمم درجه G است.

۹۱- یک گراف 20 رأسی و 30 یالی حداقل چند دور دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) 2 ۲) 9 ۳) 10 ۴) 11

۹۲- فرض کنید G گرافی 34 رأس باشد که رئوس آن با $1,2,\ldots,34$ شماره‌گذاری شده‌اند و دو رأس a و b به هم وصل‌اند، اگر و تنها اگر $\gcd(a-b,34)=1$ (بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک). تعداد مثلث‌های گراف G کدام است؟
(علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۹۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) گرافی همبند با دنباله درجات (3,3,3,2,1,1,1,1,1) موجود نمی‌باشد.

۲) گرافی غیرهمبند با دنباله درجات (4,4,4,4,4,3,3,3,3) موجود نمی‌باشد.

۳) گرافی دو بخشی با دنباله درجات (7,6,3,3,3,3,3,3) موجود نمی‌باشد.

۴) گرافی با دنباله درجات (6,6,3,3,3,3,3) موجود می‌باشد.

۹۴- فرض کنید G یک گراف بوده که روی یال‌های آن اعداد صحیح گذاشته‌ایم به طوری که در هر رأس مجموع مقادیر یال‌های متصل به آن رأس برابر 1 است. کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) G دو بخشی است.
۲) تعداد رئوس G زوج است.
۳) تعداد رئوس G فرد است.
۴) G دارای تطابق کامل است.

۹۵- فرض کنید G یک گراف n رأسی بوده و A ماتریس مجاورت G باشد. اگر n تا درایه 1 در A انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطح و یک ستون مشترک نباشند، در این صورت n تا 1 در گراف متناظر با چیست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) یک تطابق کامل.

۲) دوری همیلتونی.

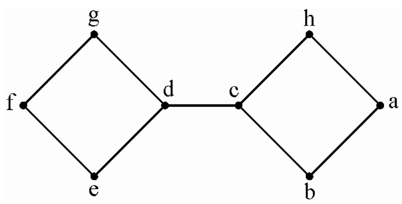
۳) اجتماعی از دورهای مجزا که رئوس را می‌پوشاند.

۴) یک زیر گراف فراگیر که هر مولفه همبندی‌اش دور یا مسیر دو رأسی است.

۹۶- فرض کنید T یک درخت دودویی با k برگ باشد، تعداد رأس‌های درخت حداکثر چندتاست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

۱) $2k-1$
۲) $k+1$
۳) k^2-1
۴) 2^k-1

۹۷- گراف برچسب‌گذاری شده زیر چند درخت DFS با ریشه h دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)



۱) 3
۲) 6
۳) 8
۴) 9

۹۸- در گراف G، هر سه تایی مرتب مانند (a,b,c) با این شرط که b, a و c اعدادی از مجموعه $\{0,1,2,3\}$ باشند، یک رأس است و دو رأس (a,b,c) و (a',b',c') مجاورند اگر و تنها اگر: $|a-a'|+|b-b'|+|c-c'|=1$ این گراف چند یال دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

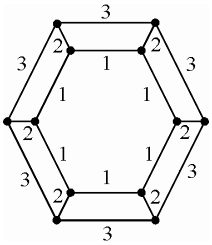
۱) 64
۲) 128
۳) 144
۴) 192

۹۹- فرض کنید G یک گراف $n = 1392$ رأسی با ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})_{n \times n}$ باشد که در آن (پیمانه ۲) $a_{ij} = i - j$. کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

۱) G مسطح است. ۲) G منظم است.

۳) G همبند است. ۴) G دوبخشی است.

۱۰۰- تعداد کوچکترین درخت‌های فراگیر در گراف زیر چندتاست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)



۱) 6

۲) 12

۳) 18

۴) 36

۱۰۱- فرض کنید G گرافی باشد که درجه همه رأس‌های آن زوج است. کدام عبارت درباره G همیشه درست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

۱) G دو بخشی است.

۲) هر دو رأس G روی یک دور هستند.

۳) G دوری دارد که از همه رأس‌های آن عبور می‌کند.

۴) مجموعه همه یال‌های G را می‌توان به تعدادی دور افراز کرد.

۱۰۲- با در نظر گرفتن یکریختی، چند گراف همبند از مرتبه 6 و اندازه 6 وجود دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

۱) 9 ۲) 13 ۳) 15 ۴) 17

۱۰۳- حداکثر تعداد درخت‌های فراگیر در گراف K_{21} که هیچ دو درختی یال مشترک نداشته باشند، چندتاست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) 8 ۲) 9 ۳) 10 ۴) 11

۱۰۴- فرض کنید G یک گراف دو بخشی باشد که متمم (مکمل) آن هم دو بخشی است. کدام گزینه همواره درباره G درست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) G حداکثر 4 رأس دارد.

۲) G مسیر یا دوری به طول زوج است.

۳) G گراف کامل دو بخشی است.

۴) G دارای n رأس و حداکثر $n-1$ یال است.

۱۰۵- کدام‌یک از دنباله‌های زیر می‌تواند دنباله درجات یک گراف دوبخشی باشد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

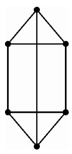
۱) $(5,5,4,3,3,2,1,1,1)$ ۲) $(6,6,4,4,4,4,4,4,2,2,2)$

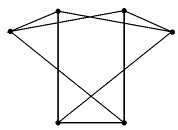
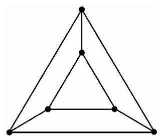
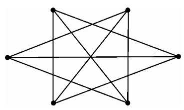
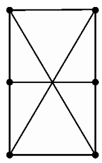
۳) $(5,5,5,5,5,5,4,4,4)$ ۴) $(4,4,4,4,4,3,3,2,2)$

۱۰۶- دنباله درجات $3,2,2,2,2,2,1,...,1$ با تعداد دلخواه 1 در نظر بگیرید. تعداد درخت‌های با این دنباله درجات چندتاست؟ (فقط درخت‌های غیریکریخت را بشمارید.) (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

۱۰۷- کدامیک از گراف‌های زیر با گراف روبرو یکریخت نیست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۰۸- می‌خواهیم تمام یال‌های گراف کامل 6 رأسی K_6 را با تعدادی رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ مثلثی وجود نداشته باشد که همگی یال‌هایش همرنگ باشند، حداقل تعداد رنگی که برای اینکار لازم است برابر کدام‌یک است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۰۹- فرض کنید T درختی با حداقل 4 رأس باشد، گراف G با اضافه کردن 3 یال به درخت T تولید شده است. در این صورت همه گزینه‌ها درباره G صحیح‌اند. به غیر از: (علوم کامپیوتر – ۹۶)

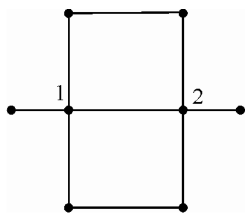
۱) در گراف G حداکثر 6 دور وجود دارد.

۲) حالتی وجود دارد که گراف G غیرمسطح باشد.

۳) بین هر دو رأس G حداکثر 4 مسیر وجود دارد.

۴) طول بلندترین مسیر در گراف G و درخت T الزاماً برابر نیست.

۱۱۰- فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف زیر باشد. مقدار درایه $(1,2)$ در ماتریس A^3 چند است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۶)



۱) 9
۲) 7
۳) 5
۴) 2

۱۱۱- در بین موارد (الف) تا (ث)، دو مورد نادرست هستند، آن ها مشخص کنید. (IT–۹۰)

الف) اگر v رأسی از گراف همبند و ساده G باشد، آنگاه v یک همسایه در هر جزء گراف G-v دارد.

ب) اگر در گراف اویلری G یال‌های e و f دارای یک رأس مشترک باشند، آنگاه در G مداری اویلری وجود خواهد داشت که در آن e و f پشت سرهم قرار می‌گیرند.

پ) هر گراف دو بخشی در صورتی همبند است که افزار دو بخشی یکتا داشته باشد.

ت) گراف G همبند است اگر در هر افراز رأس‌های آن به دو مجموعه ناتهی، یالی دارای رأس‌های انتهایی در هر دو مجموعه وجود داشته باشد.

ث) در گرافی که همه رأس‌های آن درجه زوج دارند، هر دنباله ماکزیمال یک مدار اویلری است.

۱) (پ) و (ت) ۲) (ب) و (پ) ۳) (ب) و (ث) ۴) (الف) و (ث)

۱۱۲- یک اتومورفیزم گراف G یک ایزومورفیزم از G به G است. کدام مورد درست نیست؟ (IT–۹۱)

۱) گراف کامل دو بخشی $K_{3,3}$ دارای 36 اتومورفیزم است.

۲) گراف کامل دو بخشی $K_{3,5}$ دارای 720 اتومورفیزم است.

۳) مسیری با رأس‌های $\{1,2,3,4\}$ و یال‌های $\{12,23,34\}$ دو اتومورفیزم دارد.

۴) اتومورفیزم‌های G جایگشت‌هایی از رأس‌های G هستند که اگر هم به سطرها و هم به ستون‌های ماتریس همسایگی G اعمال شوند، ماتریس همسایگی تغییر نمی‌کند.

۱۱۳- کدام گزینه نادرست است؟ (IT–۹۲)

۱) اگر G گراف جهت‌دار برای رابطه مرتب کلی R روی A باشد و مجموعه A دارای n عضو باشد، $\frac{n^2+n}{2}$ یال در G وجود دارد.

۲) اگر (A,R) یک مجموعه مرتب جزیی بوده ولی مرتب کلی نباشد و $\phi \neq B \subset A$، آنگاه $(B,(B\times B)\cap R)$ ممکن است مرتب کلی باشد.

۳) در صورتی که p و q دو عدد اول متمایز باشند، تعداد یال‌های موجود در نمودار هاسه (Hasse) مقسوم‌علیه‌های مثبت p^3q^2 برابر با 19 است.

۴) اگر (A,R_1) و (B,R_2) دو مجموعه مرتب جزیی بوده و R روی $A\times B$ به صورت $(a,b)R(x,y)$ اگر و فقط اگر aR_1x و bR_2y تعریف شود، آنگاه R یک رابطه ترتیب جزیی است.

۱۱۴- کدام گزینه درست است؟ (IT-۹۲)

۱) هر گراف بدون جهت $G=(V,E)$ که در آن $|V|=|E|+1$ یک درخت است.

۲) بیشینه تعداد رئوس داخلی یک درخت کامل چهارتایی (quaternary) با ارتفاع 8 برابر 21645 است.

۳) اگر $T=(V,E)$ درختی با $|V|=10$ رأس باشد، دقیقاً 30 مسیر در آن یافت می‌شود.

۴) درخت سه‌تایی (Ternary) کامل $T=(V,E)$ دارای 34 رأس داخلی است. در این صورت تعداد یال‌های آن 102 است.

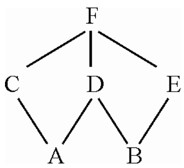
۱۱۵- درستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: (IT-۹۳)

الف) هر گراف ساده بدون جهت که هر رأس آن درجه حداقل $\delta\geq 2$ دارد شامل دوری به طول حداقل δ است.

ب) با فرض آن که طول بزرگترین مسیر در یک درخت ℓ است، هر دو مسیر به طول ℓ در درخت فوق حتماً دست کم یک رأس مشترک خواهند داشت.

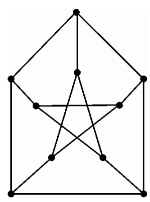
۱) الف: نادرست و ب: نادرست
۲) الف: درست و ب: درست
۳) الف: نادرست و ب: درست
۴) الف: درست و ب: نادرست

۱۱۶- نمودار هاس یک ترتیب جزیی به شکل زیر است. این ترتیب جزیی چند ترتیب توپولوژیک متفاوت دارد؟ (IT-۹۴)



۱) 6
۲) 8
۳) 12
۴) 16

۱۱۷- فرض کنید k مینیمم تعداد رنگی باشد که می‌توان رئوس گراف پترسن را رنگ‌آمیزی کرد با این ویژگی که هر رأس و همسایه‌هایش 4 رنگ متفاوت داشته باشند. k برابر کدام است؟ (ریاضی - ۹۴)



۱) 2
۲) 6
۳) 8
۴) 10

۱۱۸- کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) هر گراف 4– منتظم همبند فاقد یال برشی است.

۲) یک گراف با، 5 مولفه همبندی که همه مولفه‌های آن درخت می‌باشند و 100 رأسی است 99 یال دارد.

۳) هر گراف همبند 3– منتظم فاقد یال برشی است.

۴) درختی موجود است، که با حذف یک یال از آن سه مولفه همبندی پدید آید.

۱۱۹- کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) دقیقاً ، 6 گراف 9 رأسی 6 منتظم دو به دو غیر یکریخت وجود دارد.

۲) هیچ گراف 10 رأسی دو بخشی 4 منتظم نداریم.

۳) هر گراف 9 رأسی 4 منتظم همبند است.

۴) هر گراف 10 رأسی 4 منتظم همبند است.

۱۲۰- فرض کنید G گرافی 7– منتظم و جهت‌دار باشد به طوری که درجه خروجی هر رأس آن 1 یا 4 است. اگر a و b به ترتیب تعداد رئوس با خروجی‌های 1 و 4 باشند در این صورت $\frac{b}{a}$ برابر کدام است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

۱۲۱- کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) درختی با ماکزیمم درجه 10 وجود دارد که دقیقاً 9 تا رأس درجه 1 دارد.

۲) درختی وجود دارد که مسطح نیست.

۳) درختی وجود دارد که دو تطابق کامل دارد.

۴) هر درخت حداکثر یک تطابق کامل دارد.

۱۲۲- تعداد مسیرهای 4 رأسی در یک گراف 3– متنظم دو بخشی 10 رأسی برابر کدام است؟ (ریاضی – ۹۴)

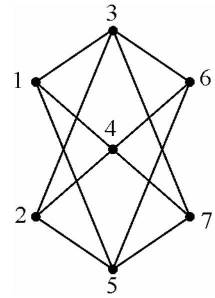
۱) 20 ۲) 40 ۳) 60 ۴) 100

۱۲۳- گراف سه بخشی $k_{2,3,2}$ را از اتصال گراف کامل دو بخشی $k_{2,3}$ و گراف کامل دو بخشی $k_{3,2}$ به شکل زیر ساخته‌ایم: کدام گزینه یا گزینه‌ها در مورد گراف $k_{2,3,2}$ صحیح است. (مهندسی کامپیوتر – ۹۱)

الف) هامنی (مسطح) است.

ب) مدار اویلری ندارد ولی گذر اویلری دارد.

ج) هامیلتونی است.



د) مسیر هامیلتونی دارد ولی هامیلتونی نیست.

هـ) ۲- رنگ‌پذیر است.

۱) د ، هـ

۲) الف، ب و ج

۳) الف، د ، هـ

۴) ب ، ج ، هـ

۱۲۴- یک تطابق از گراف $G=(V,E)$ زیرمجموعه‌ای از یال‌ها مانند $M \subseteq E$ است طوری که هیچ دو یالی از M بر رأس مشترکی واقع نباشد. تطابق M ماکزیمال است، اگر M زیر مجموعه‌ی سره‌ی تطابق دیگری از G نباشد. درستی دو گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (مهندسی کامپیوتر - ۹۲)

الف) اگر M_1 و M_2 دو تطابق دلخواه از $G=(V,E)$ باشند، آنگاه گراف $G'=(V, M_1 \cup M_2)$ دو بخشی است.

ب) اگر M_1 و M_2 دو تطابق ماکزیمال باشند، آنگاه $|M_1| \le \frac{3}{2}|M_2|$

۱) الف: نادرست، ب: نادرست ۲) الف: نادرست، ب: درست

۳) الف: درست، ب: نادرست ۴) الف: درست، ب: درست

۱۲۵- درجه‌های ورودی و خروجی یک گراف جهت‌دار G داده شده‌اند. فرض کنید که گراف طوقه (یالی از یک رأس به خودش) نداد و یال چندگانه هم نداریم (یعنی از یک رأس به رأس دیگر حداکثر یک یال جهت‌دار وجود دارد). برای چندتا از دنباله‌ی درجه‌های ورودی و خروجی زیر، گراف متناظری وجود دارد؟ فرض کنید که رأس‌های گراف از 1 تا n شماره‌گذاری شده، و دنباله‌ی درجه‌ها به ترتیب شماره‌ی رأس‌ها آمده است. (مهندسی کامپیوتر - ۹۳)

الف) $d_{in}=(0,1,2,3)$ و $d_{out}=(2,2,1,1)$

ب) $d_{in}=(2,2,1)$ و $d_{out}=(2,2,1)$

ج) $d_{in}=(1,1,2,3,3)$ و $d_{out}=(2,2,3,1,2)$

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۱۲۶- فرض کنید G گرافی مسطح و همبند با 16 رأس باشد که درجه‌ی هر رأس آن 4 است. وقتی این گراف به صورت مسطح در صفحه قرار می‌گیرد. هریک از ناحیه‌های متناهی ایجاد شده سه ضلعی یا چهار ضلعی هستند و مرز ناحیه‌ی نامتناهی نیز از چهار یال تشکیل شده است. چند ناحیه‌ی سه ضلعی در این گراف وجود دارد؟ (مهندسی کامپیوتر - ۹۴)

۱) 7 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 10

۱۲۷- گراف K_{100} شامل چند زیرگراف یکریخت با ستاره $K_{1,4}$ است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $\binom{100}{5}$ ۲) $96\binom{100}{5}$ ۳) $96\binom{100}{4}$ ۴) $100\binom{100}{4}$

۱۲۸- همه عبارات زیر درباره گراف G صحیح است، بجز: (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) اگر G گراف دوبخشی باشد، آنگاه مکمل آن دوبخشی نیست.

۲) هر گراف دوبخشی با n رأس حداکثر $\frac{n^2}{4}$ یال دارد.

۳) گراف دوبخشی منتظم با تعداد فرد رأس وجود ندارد.

۴) اگر G یک گراف دوبخشی باشد، با حذف هر یال، دوبخشی باقی می‌ماند.

۱۲۹- درخت T که دارای 3 رأس درجه‌ی 5 است، حداقل دارای چند برگ است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 2 ۲) 10 ۳) 11 ۴) 15

۱۳۰- طبق تعریف زیر، گراف G چند یال دارد؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

هر زیرمجموعه 3 عضوی از مجموعه $x=\{1,2,...,10\}$ را یـک رأس G در نظـر بگیریـد. دو رأس A و B مجاورند اگر و تنها اگر اشتراک A و B تک عضوی باشد $(|A\cap B|=1)$.

۱) 120 ۲) 620 ۳) 1260 ۴) 3780

۱۳۱- گراف G از مرتبه 15 با مینیمم درجه $\delta=3$، دارای 3 مؤلفه همبندی است. تعداد حـداقل و حداکثر یال‌ها را با q_{min} و q_{max} نمایش می‌دهیم. در ایـن صـورت (q_{min},q_{max}) کـدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) $(12,30)$ ۲) $(12,33)$ ۳) $(14,25)$ ۴) $(14,36)$

۱۳۲- گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{2,3,4,...,20\}$ به صورت زیر تعریف مـی‌شـود کـه دو رأس i و j مجاور هستند اگر و تنها اگر i و j نسبت به هم اول باشند. کدام مورد درباره G درست است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) مسیر هامیلتونی دارد اما اویلری نیست.

۲) گراف اویلری است اما مسیر هامیلتونی ندارد.

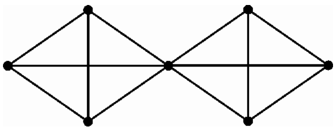
۳) نه مسیر هامیلتونی دارد و نه گراف اویلری است.

۴) هم مسیر هامیلتونی دارد و هم گراف اویلری است.

۱۳۳- چند گراف کامل دوبخشی وجود دارد که قابل تجزیه به 3 درخت فراگیر باشد؟ (در تجزیه یک گراف به چند زیرگراف، هر یال گراف دقیقاً در یک زیرگراف ظاهر می‌شود.)
(علوم کامپیوتر – ۹۷)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۳۴- تعداد درخت‌های پوشای گراف زیر چندتاست؟ (IT – ۹۷)



۱) 2^4
۲) 2^6
۳) 2^8
۴) 2^{10}

۱۳۵- با توجه به دو گزاره‌ی داده شده، کدام مورد درست است؟ (IT – ۹۷)

a) در هر درخت n رأسی اندازه بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل حداقل $\frac{n}{2}$ است.

b) اگر T یک گشت ماکزیمال در گراف G باشد که دو رأس ابتدایی و انتهایی آن متفاوت است، آن‌گاه درجه‌ی دو رأس ابتدایی و انتهایی T در G فرد است.

۱) (a) درست، (b) درست
۲) (a) نادرست، (b) درست
۳) (a) درست، (b) نادرست
۴) (a) نادرست، (b) نادرست

پاسخ سؤالات طبقه‌بندی شده فصل هشتم: گراف‌ها

۱- گزینه (۳) صحیح است.

به رابطه‌ای که بین درجات رئوس و تعداد یال‌ها داریم توجه کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

در این گراف، درجه‌ی همه رئوس برابر با 3 است پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} 3 = 2m \Rightarrow 3n = 2m$$

از طرفی طبق صورت سوال داریم:

$$2m + 6n = 90 \Rightarrow 3n + 6n = 90 \Rightarrow n = 10 \ , \ m = 15$$

۲- گزینه (۲) صحیح است.

به رابطه‌ی بین درجات رئوس و تعداد یال‌ها توجه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2e$$

طبق تعریف δ و Δ داریم: $\delta \le \deg(V_i) \le \Delta$ بنابراین:

$$n\delta \le \sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) \le n\Delta \Rightarrow n\delta \le 2e \le n\Delta \Rightarrow \delta \le 2\left(\frac{e}{n}\right) \le \Delta$$

۳- گزینه (۱) صحیح است.

اگر رئوس دارای درجه زوج و فرد را جدا کنیم واضح است که خواهیم داشت:

تعداد کل رئوس = تعداد رئوس با درجه فرد + تعداد رئوس با درجه زوج

در این مثال، تعداد کل رئوس فرد است. از طرفی می‌دانیم که در هر گراف ساده باید تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، عددی زوج باشد، بنابراین لازم است تعداد رئوس با درجه‌ی زوج، عددی فرد باشد. پس m عددی فرد است.

$$m = 1,3,5,7,.... \Rightarrow m^2 = 1,9,25,49,...$$

در هر صورت می‌بینیم که باقیمانده‌ی تقسیم m^2 بر 8 برابر با یک است.

توضیح کامل‌تر:

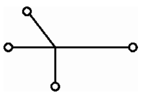
فرد است $m \Rightarrow m = 2k+1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k(k+1)+1$

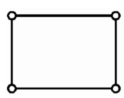
عدد $k(k+1)$ همواره زوج است زیرا حاصلضرب 2 عدد متوالی است بنابراین $k(k+1) = 2k'$ است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$m^2 = 4(2k') + 1 = 8k' + 1$$

پس باقیمانده تقسیم m^2 بر 8 برابر با یک است.

۴- گزینه (۱) صحیح است.

طبق فرض، هر جفت از رئوس گراف G باید دارای 1 یا 3 یا 5 یا ... همسایه‌ی مشترک باشند. نتیجه‌ی فوری این شرط آن است که گراف G باید همبند باشد. اکنون به انوع مختلفی از گراف‌ها که می‌شناسیم توجه کنید. درخت‌ها این شرط را ندارند مثلاً در درخت  رئوس a و b اصلاً همسایه مشترک ندارند. گراف‌های دو بخشی مثل $k_{n,m}$ این شرط را ندارند زیرا اگر a را از یک بخشی و b را از یک بخش دیگر در نظر بگیریم، همسایه‌ی مشترکی نخواهند داشت. در دورهای C_4, C_5, C_6,... بسیاری از جفت رئوس‌ها هستند که همسایه‌ی مشترک ندارند. مثلاً در



رئوس a و b همسایه‌ی مشترک ندارند.

به این ترتیب با کمی دقت متوجه می‌شویم که فقط در گراف k_n، هر جفت از رئوس دارای همسایه‌ی مشترک هستند.

حالا فرض کنیم a و b یک جفت از رئوس گراف k_n باشند. از آنجا که این جفت از رئوس، با همه رئوس دیگر همسایه هستند، پس $n-2$ همسایه‌ی مشترک دارند.

طبق فرض $n-2$ باید عددی فرد باشد پس n باید عددی فرد باشد.

بنابراین گراف G باید گراف k_n باشد و n عددی فرد است. درجه‌ی هر رأس از این گراف برابر با $n-1$ است پس گزینه (۱) درست است.

۵- گزینه (۳) صحیح است.

با استفاده از الگوریتم هاول – حکیمی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی گزینه (۱): 5 , 4 , 4 , 3 , 3 , 2 , 2

از همان ابتدا تعداد فردها، فرد است پس این دنباله ترسیمی نیست.

بررسی گزینه (۲): 5 , 4 , 4 , 4 , 2 , 1

حذف 5: 3 , 3 , 3 , 1 , 0

حذف 3: 2 , 2 , 0 , 0

حذف 2: $1,-1,0$

مقدار منفی به وجود آمد و این دنباله ترسیمی نیست.

بررسی گزینه (۳): 4,3,2,1,1,1,1,1

حذف 4: 2,1,0,0,1,1,1

حذف 2: $0,0,1,1,0,0$

این دنباله به وضوح ترسیمی است. پس گزینه (۳) صحیح است.

بررسی گزینه (۴): $7,5,4,4,2,2,1,1$

حذف 7: $4,3,3,1,1,0,0$

حذف 4: $2,2,0,0,0,0$

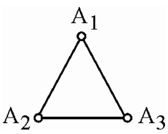
حذف 2: $1,-1,0,0,0$

مقدار منفی بوجود آمد پس این دنباله ترسیمی نیست.

۶- گزینه (۱) صحیح است.

هرکدام از رئوس گراف G یک زیرمجموعه‌ی 2 عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6\}$ است. فرض کنید $A_1=\{a,b\}$ و $A_2=\{c,d\}$ و $A_3=\{e,f\}$، سه رأس از گراف G باشند که تشکیل یک مثلث داده‌اند:

طبق صورت سوال باید داشته باشیم:



$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \phi$$

پس مجموعه‌های A_1,A_2,A_3 باهم تشکیل یک نرم‌افزار از مجموعه‌ی 6 عضوی را می‌دهند که دارای 3 کلاس 2 عضوی است. تعداد مثلث‌ها در این گراف، برابر است با تعداد افزارهای یک مجموعه‌ی 6 عضوی به 3 قطعه‌ی 2 عضوی:

$$\text{جواب}=\frac{1}{3!}\binom{6}{2,2,2}=\frac{6!}{3!2!2!2!}=15$$

۷- گزینه (۲) صحیح است.

افراد شرکت‌کننده در سمینار را به صورت رئوس یک گراف و دست دادن دو عضو با یکدیگر را به صورت یال‌های گراف در نظر بگیرید. در این صورت درجه‌ی هر رأس برابر است با تعداد افرادی که با آن رأس دست داده‌اند. دو نکته در مورد درجه‌ی رئوس یک گراف ساده داریم که همواره برقرار هستند:

اولاً: تعداد رئوس دارای درجه‌ی فرد، همواره عددی زوج است.

اما تعداد رئوس دارای درجه‌ی زوج، می‌تواند زوج یا فرد باشد.

ثانیاً: حداقل 2 رأس وجود دارند که درجه‌ی آن ها باهم برابر است.

۸- گزینه (۴) صحیح است.

هر گرافی که شامل دور نباشد حتماً یک جنگل است. به عبارتی یا یک درخت است که در این

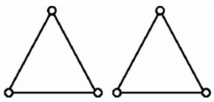
صورت $e=n-1$ و یا از k درخت مجزا تشکیل شده است که در این صورت $e=n-k$ است. به هر حال می‌بینید که اگر G فاقد دور باشد همواره $e<n$ است. بنابراین شرط $e \geq n$ نشان می‌دهد که گراف G حداقل یک دور دارد.

برای مثال در گراف C_n داریم $e=n$ و در گراف k_n داریم $e>n$.

۹- گزینه (۲) صحیح است.

در این گراف $n=100$ و $e=100$ است پس $e=n$ شده است. اگر گراف G فاقد دور باشد آنگاه یک جنگل است. در این صورت اگر G همبند باشد یک درخت است و در آن $e=n-1$ است، اگر هم ناهمبند باشد آنگاه از k مولفه‌ی همبندی که هرکدام یک درخت هستند تشکیل می‌شود و در آن $e=n-k$ است. در هر صورت می‌بینید که اگر G فاقد دور باشد آنگاه $e<n$ است. بنابراین وقتی $e=n$ (یا $e \geq n$) باشد، می‌توان نتیجه گرفت که G حداقل شامل یک دور است. به عبارتی گزینه (۲) صحیح است.

در مورد گزینه (۱) توجه کنید که در گرافی مانند G_1 ، e با n برابر است اما این گراف دارای 2 دور است.

G_1:


البته گزینه (۱) اگر با شرط همبند بودن G مطرح می‌شد درست بود.

نتیجه: هرگاه G همبند باشد و $e=n$ باشد آنگاه G دقیقاً یک دور خواهد داشت.

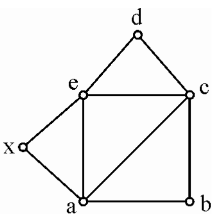
۱۰- گزینه (۱) صحیح است.

گزینه‌ی (۱) به وضوح صحیح است زیرا برای هر $n>2$ می‌توان گراف C_n را در نظر گرفت که از این دور ساده به طول n ساخته می‌شود و هم اویلری است و هم هامیلتونی.

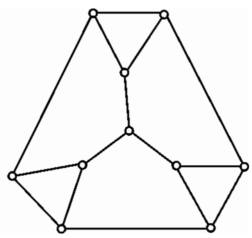
بنابراین برای پاسخ دادن به این تست، بررسی سایر گزینه‌ها لازم نیست با این حال برای کامل‌تر شدن پاسخ، آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی سایر گزینه‌ها:

مثال نقض برای گزینه (۲)، گراف G_1 است. این گراف منظم نیست. اما همه درجات آن زوج هستند پس اویلری است و مدار همیلتونی هم دارد که به شکل $xabcdex$ است.

G_1:


گزینه (۳) به سادگی رد می‌شود زیرا در گراف اویلری باید همه‌ی درجات زوج باشند پس گراف‌های 3− منظم نمی‌توانند اویلری باشند.
یافتن مثال نقض برای گزینه‌ی (۴) قدری وقت‌گیر است. با این حال اگر به گراف‌های 3 منظم توجه کنید می‌بینید که گرافی مانند G_2 هامیلتونی نیست زیرا مدار هامیلتونی ندارد.

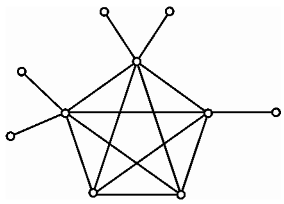


۱۱- گزینه (۴) صحیح است.

اگر آن 5 رأس درجه‌ی یک را کنار بگذارید، با حذف هرکدام از آن‌ها یک یال هم حذف می‌شود. بنابراین آنچه باقی می‌ماند گرافی با 5 رأس و 10 یال است. تنها حالتی که می‌توانیم با 5 رأس 10 یال به وجود آوریم، گراف کامل k_5 است. در واقع تعداد یال‌های گراف‌های k_5 برابر است با

$e = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ [تعداد یال‌های گراف k_n برابر است با $e = \frac{n(n-1)}{2}$]

با توجه به این توضیحات می‌بینم که گراف داده شده همان k_5 است که به آن 5 رأس درجه‌ی یک هم اضافه شده است. برای مثال گراف G می‌تواند مطابق شکل باشد:



گزینه‌ی (۱) به وضوح درست است.
در مورد گزینه‌های (۲) ، (۳) و (۴) ابتدا توجه داشته باشید که 5 رأس درجه‌ی یک، هیچ نقشی در ایجاد دورها ندارند. بنابراین کافیست تعداد دورها در گراف k_5 را بررسی کنیم. طبق فرمول‌هایی که توضیح آن‌ها در متن درس آمده است تعداد دورهای به طول m در گراف k_n برابر با $\frac{(m-1)!}{2}\binom{n}{m}$ است.

k_5 تعداد دورهای به طول 5 در $= \frac{(5-1)!}{2}\binom{5}{5} = 12$

k_5 تعداد دورهای به طول 3 در $= \frac{(3-1)!}{2}\binom{5}{2} = 10$

k_5 در 4 تعداد دورهای به طول $= \frac{(4-1)!}{2}\binom{5}{4} = 15$

بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

۱۲- گزینه (۴) صحیح است.

تعداد دورهای به طول m در گراف k_n از فرمول $\frac{(m-1)!}{2}\binom{n}{m}$ به دست می‌آید. دورهای همیلتونی، دورهایی هستند که از همه رئوس می‌گذرند پس تعداد دورهای همیلتونی در k_n برابر است با تعداد دورهای به طول n به عبارتی داریم:

k_n تعداد دورهای همیلتونی در $= \frac{(n-1)!}{2}\binom{n}{n} = \frac{(n-1)!}{2}$

به ازای $n = 9$، جواب برابر با $\frac{8!}{2}$ است.

$$\frac{8!}{2} = \frac{8! \times 9}{2 \times 9} = \frac{9!}{18}$$

۱۳- گزینه (۲) صحیح است.

بررسی اویلری بودن یا مسیر اویلری داشتن، ساده است. کافی است به درجه رئوس توجه کنیم.
دقیقاً 2 از رئوس دارای درجه‌ی فرد هستند بنابراین گراف G اویلری نیست (مدار اویلری ندارد) اما دارای مسیر اویلری هست. این مسیر باید از یکی از رئوس V_3 یا V_4 که درجه‌ی فرد دارند آغاز شود و در نهایت به دیگری ختم شود.
در ضمن این گراف دارای مدارهای همیلتونی هست. مثلاً $V_1V_2V_6V_5V_4V_3V_1$ یک مدار همیلتونی است. پس G گرافی همیلتونی است.

۱۴- گزینه (۳) صحیح است.

همه‌ی گراف‌های $k_n (n \geq 3)$ دارای مدار همیلتونی هستند. اما مدار اویلری به شرطی وجود دارد که گراف همبند بوده و درجه‌ی همه‌ی رئوس زوج باشد. در گراف k_n درجه‌ی همه‌ی رئوس برابر با $n-1$ است. برای آنکه $n-1$ زوج باشد باید n فرد باشد. پس k_{16} مدار اویلری ندارد.

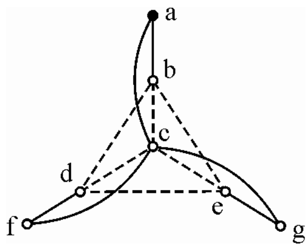
۱۵- گزینه (۲) صحیح است.

مطابق متن درس، همه‌ی گراف‌های کامل $k_n (n \geq 3)$ همیلتونی هستند اما گراف کامل دو بخشی یعنی $k_{n,m}$ فقط وقتی همیلتونی است که $n = m$ باشد. پس گزینه (۲) همیلتونی نیست.
در مورد گزینه‌های (۳) و (۴) به سادگی می‌توانید مدار همیلتونی را پیدار کنید.

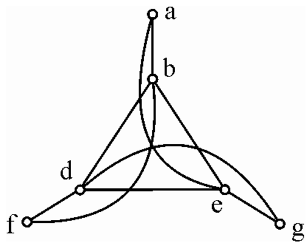
۱۶- گزینه (۲) صحیح است.

مدار اویلری فقط وقتی وجود دارد که گراف همبند باشد و همه‌ی درجات، زوج باشند. در این

گراف رأس درجه‌ی فرد وجود ندارد پس اویلری است.
برای یافتن مدار همیلتونی یا اطمینان از عدم وجود آن، می‌توانید از رئوس درجه 2 کمک بگیرید. رأس‌های f , a و g دارای درجه 2 هستند. یال‌های مرتبط با این رئوس را پررنگ کنید. حالا با کمی دقت می‌بینید که با استفاده اجباری از این یال‌ها و اضافه کردن برخی دیگر از یال‌ها، هرگز نمی‌توان یک مدار همیلتونی یافت. در واقع نمی‌توان مداری یافت که از همه رئوس فقط یک بار عبور کند.



☜ **نکته** : در مثال بالا اگر نقطه‌ی C رأسی از گراف نباشد، به گرافی خواهیم رسید که اویلری و همیلتونی هست. به شکل زیر توجه کنید:

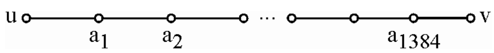


اگر یال‌های مرتبط با رئوس درجه 2 را پررنگ کنیم، خواهیم دید که یک مدار همیلتونی شکل می‌گیرد. در واقع baegdfb یک مدار همیلتونی است.
برای این شکل، گزینه (۱) صحیح می‌بود.

۱۷- گزینه (۳) صحیح است.
مطابق توضیحات متن درس، گراف کامل دو بخشی $k_{n,m}$ فقط هنگامی دور همیلتونی دارد که $n = m \geq 2$ باشد و تعداد دورهای همیلتونی آن برابر با $\frac{n!(n-1)!}{2}$ است.
بنابراین گزینه (۳) صحیح است، البته طراح سوال در نوشتن شرط $n \geq 1$ بی‌دقتی کرده است زیرا می‌دانیم که به ازای $n = 1$، گراف $k_{1,1}$ اصلاً شامل دور نیست.
توجه داشته باشید که فرمول $\frac{n!(n-1)!}{2}$ را می‌توان به صورت $\frac{n!n!}{2n}$ هم نوشت.

۱۸- گزینه (۱) صحیح است.

مطابق اطلاعات داده شده؛ دو رأس u و v با فاصله‌ی 1385 یال از یکدیگر در این گراف وجود دارند. بنابراین مسیری ساده با طول 1385 داریم که u و v ابتدا و انتهای آن هستند. مطابق شکل بیاد رئوس $a_1, a_2, \ldots, a_{1384}$ رئوس میانی این مسیر باشند. این رئوس به همراه رأس‌های u و v روی هم 1386 رأس گراف G را تشکیل می‌دهند.

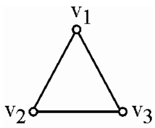


بنابراین گراف G دقیقاً یک مسیر ساده با 1386 رأس و 1385 یال است و هیچ رأس و یال دیگری ندارد.

۱۹- گزینه (۴) صحیح است.

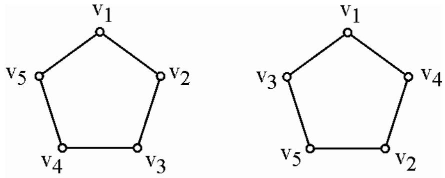
به عنوان یک پرسش چهارگزینه‌ای، مسأله‌ی ساده‌ای نیست. با این حال ما می‌توانیم برای روشن شدن موضوع، به جای $n = 37$ بر روی اعداد کوچکتر متمرکز شویم تا قاعده‌ی کلی را در این زمینه به دست آوریم. البته بهتر است n فرد باشد زیرا 37 عددی فرد است.

در مرحله اول فرض کنید $n = 3$ باشد. این 3 نفر در روز اول می‌توانند به شکل مقابل دور میز بنشینند.



(روز اول)

اما در روزهای بعد، هر طور که پشت میز بنشینند، نفرات مجاور با هر شخص، تغییری نمی‌کند. پس با شرط داده شده، برای $n = 3$ جواب برابر با یک روز است.



(روز اول) (روز دوم)

اکنون حالت $n = 5$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید در روز اول، به شکل سمت چپ کنار هم نشسته باشند. در روز دوم v_1 می‌خواهد نفرات مجاور خود را تغییر دهد بنابراین فقط v_3 و v_4 می‌توانند مجاور v_1 بنشینند. سایر نظرات هم، همانطور که در شکل سمت راست می‌بینید، نظرات مجاور خود را نسبت به روز اول تغییر داده‌اند. اما این تغییرات برای روز سوم غیرممکن است یعنی دیگر شخص غیرتکراری نداریم که مجاور v_1 قرار بگیرد. پس برای $n = 5$، جواب برابر با

2 خواهد بود.

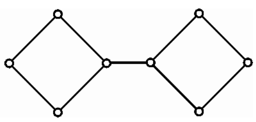
$$\begin{cases} n=3 \Rightarrow & \text{1 روز} \\ n=5 \Rightarrow & \text{2 روز} \end{cases}$$

با مقایسه‌ی اعداد به دست آمده با گزینه‌ها متوجه می‌شویم که برای $n=37$ جواب صحیح برابر با 18 روز خواهد بود.

در واقع برای هر n، جواب برابر با $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ است.

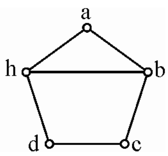
توجه: با توجه به آنکه هر بار می‌خواهیم نظرات مجاور با هر شخص را تغییر بدهیم، تعداد حالات ممکن برای n نفر برابر است با تعداد دورهای همیلتونی گراف k_n که هیچ یال مشترکی نداشته باشند. تعداد چنین دورهایی برابر با $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ است.

۲۰- گزینه (۴) صحیح است.

گزینه (۱) غلط است برای مثال G_1:  دقیقاً دو دور دارد اما اویلری نیست زیرا رأس درجه‌ی فرد دارد.

گزینه (۲) هم با توجه به همان مثال رد می‌شود. این گراف دقیقاً 2 دور دارد اما رئوس آن از درجه 4 نیستند.

گزینه (۳) هم صحیح نیست برای مثال می‌دانیم که گراف C_n دارای n رأس و n یال است. حالا یک یال به C_n اضافه کنید. مثلاً گراف زیر را در نظر بگیرید:

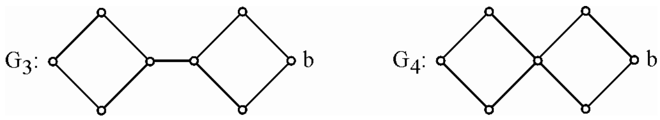
G_2:


در این گراف تعداد رئوس $n=5$ و تعداد یال‌ها $n+1=6$ است.

با کمی دقت متوجه می‌شویم که این گراف دارای 3 دور است. یکی از آن‌ها دور بزرگ به طول 5 است و دوتای دیگر دورهای کوچکتر به طول 3 و 4 هستند. پس گزینه (۳) حکم نادرستی است.

با توجه به نادرست بودن سایر گزینه‌ها، فقط گزینه (۴) می‌تواند درست باشد. اما برای توضیح کامل‌تر توجه کنید که اگر گراف همبند G دقیقاً شامل دو دور باشد، آن دو دور باید با یال برشی یا رأس برشی به هم متصل باشند. اگر مانند G_3 یال برشی داشته باشیم، تعداد مسیرها از هر رأس به هر رأس دیگر، حداکثر 4 است و اگر مانند G_4 رأس برشی داشته باشیم باز هم تعداد مسیرها از هر رأس به هر هرأس دیگر حداکثر برابر با 4 است. مثلاً هر دو گراف از رأس a تا رأس b دقیقاً

4 مسیر مختلف داریم.



۲۱- گزینه (۱) صحیح است.

ما رئوس گراف را با v_1، v_2، v_3 و v_4 نشان می‌دهیم.

ابتدا با شروع از رأس v_1 و با توجه به جهت یال‌ها، همه‌ی سیکل‌های همیلتونی را می‌نویسیم. دقت کنید که یک سیکل همیلتونی که از v_1 آغاز می‌شود باید همه‌ی رئوس دیگر را فقط یک بار ملاقات کند و در پایان به v_1 برسد.

فقط 3 سیکل با این شرایط وجود دارد:

A) $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_1$

B) $v_1\ v_3\ v_2\ v_4\ v_1$

C) $v_1\ v_3\ v_4\ v_2\ v_1$

مجموع وزن یال‌ها در سیکل A برابر با $2+6+8+6=22$ و در سیکل B برابر با $9+7+4+6=26$ و در سیکل C برابر با $9+8+3+1=21$ است. بنابراین C یک سیکل همیلتونی بهینه است.

۲۲- گزینه (۱) صحیح است.

برای مثال، یک گراف 3 بخشی کامل را در نظر بگیرید که از 3 بخش X و Y و Z تشکیل شده است و $|X|=P_1$ و $|Y|=P_2$ ، $|Z|=P_3$ است.

همه‌ی یال‌های این گراف، از یک بخشی به بخش دیگر متصل هستند.

هیچکدام از رئوس X باهم مجاور نیستند. هیچکدام از رئوس Y باهم مجاور نیستند و هیچکدام از رئوس Z، باهم مجاور نیستند. بنابراین یال‌های G به این ترتیب شمرده می‌شوند:

e_G = (یال‌های از X به Y) + (یال‌های از X به Z) + (یال‌های از Y به Z)

$$= P_1P_2 + P_1P_3 + P_2P_3$$

دقت کنید که P_2P_3 و P_3P_2 هر دو باهم نباید در مجموع ظاهر شوند. در واقع این مجموع را برای حالت کلی، می‌توان به هرکدام از صورت‌های زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_iP_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} P_iP_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ j\neq 1}}^{n} P_iP_j$$

پس گزینه‌های (۱) و (۴) تعداد یال‌های G را به درستی نشان می‌دهند.
اکنون به گراف مکمل G یعنی $\overline{G}$ فکر کنید. در این گراف، رئوس X فقط با رئوس X مجاور هستند و با هم تشکیل یک گراف کامل با P_1 رأس را می‌دهند که تعداد یال‌های آن $\binom{P_1}{2}$ است.
به همین ترتیب رئوس Y همه با هم مجاور هستند و تشکیل گراف کامل با P_2 رأس را می‌دهند که تعداد یال‌های آن $\binom{P_2}{2}$ است. رئوس Z هم یک گراف کامل با P_3 رأس می‌سازند که تعداد یال‌هایشان $\binom{P_3}{2}$ است.

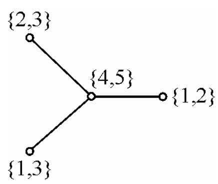
$$e_{\overline{G}} = \binom{P_1}{2} + \binom{P_2}{2} + \binom{P_3}{2}$$

در حالت کلی تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ برابر با $\sum_{i=1}^{n}\binom{P_i}{2}$ است.
پس گزینه (۱) صحیح است.

۲۳- گزینه (۱) صحیح است.
هر زیرمجموعه 2 عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5\}$ یک رأس برای G محسوب می‌شود. پس تعداد رأس‌های G برابر است با:

$$n = \binom{5}{2} = 10$$

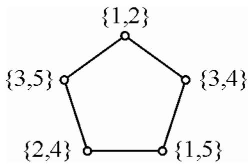
یکی از این رئوس مثلاً رأس $v_1 = \{4,5\}$ را در نظر بگیرید. این رأس با 3 رأس دیگر مجاور است که همان زیرمجموعه‌های 2 عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ هستند.
پس $\deg(v_1) = 3$ است.
در شکل زیر فقط رئوس مجاور با v_1 را نشان داده‌ایم.)



برای سایر رئوس هم مشابه همین تحلیل وجود دارد پس درجه‌ی همه‌ی رئوس این گراف برابر با 3 است. تا اینجا فهمیدیم که G گرافی 3−منتظم با 10 رأس است.
حالا می‌توانیم تعداد یال‌های G را حساب کنیم:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{10}\deg V_i}{2} = \frac{10\times 3}{2} = 15$$

در ضمن، همبند بودن این گراف هم واضح است.
پس گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) صحیح هستند.
در مورد گزینه (۱) دقت کنید که گراف دو بخشی نباید دوری به طول فرد داشته باشد در حالی که در این گراف می‌توانیم دوری به طول 5 پیدا کنیم که در شکل آمده است:
پس گراف G دو بخشی نیست.



توجه: برای اطلاعات بیشتر بخشی گراف اشتراکی را از متن درس مطالعه کنید.

۲۴- گزینه (۳) صحیح است.

همانطور که می‌دانید، گراف‌های دو بخشی، فاقد دور به طول فرد هستند، بنابراین در آن‌ها دور به طول 3 (مثلث) هم وجود ندارد. پس گراف G می‌تواند یک گراف دو بخشی با $N=16$ رأس باشد.

مثلاً گراف‌های $k_{2,14}$ ، $k_{5,11}$ ، $k_{6,10}$ و $k_{8,8}$ همگی 16 رأس دارند و فاقد مثلث هستند.

تعداد یال‌ها در گراف دو بخشی با $N=16$ رأس حداکثر $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ است و هنگامی که به دست می‌آید که تعداد رئوس در دو بخشی، باهم برابر باشند. گراف $k_{8,8}$ دارای $8\times8=64$ یال است.
پس گزینه (۳) صحیح است.

توجه: دقت کنید که گراف‌های دو بخشی، تنها نمونه از گراف G نیستند با این حال چون در گزینه‌ها مقداری بزرگتر از 64 وجود ندارد و ما توانستیم نمونه‌ای از G با 64 یال پیدا کنیم کار تمام است.

۲۵- گزینه (۱) صحیح است.

گراف دو بخشی کامل، دوری به طول فرد ندارد. اما همانطور که در متن درس توضیح دادیم، تعداد دورهای به طول $2k$ در گراف $k_{n,m}$ برابر است با: $\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!(k-1)!}{2}$ در این مثال $n=m=7$ است و تعداد دورهای به طول $2k=4$ را می‌خواهیم یعنی $k=2$ است.

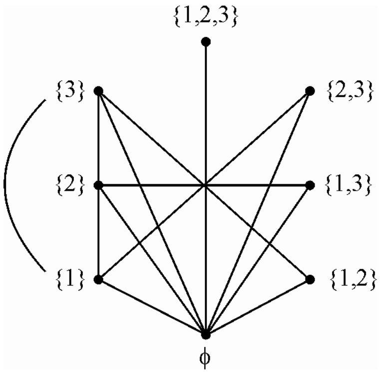
جواب $=\binom{7}{2}\binom{7}{2}\frac{2!1!}{2}=21\times21=441$

۲۶- گزینه (۲) صحیح است.

اگر گراف G فاقد دور باشد یک جنگل (یا درخت) است. در هر درخت $e = n - 1$ است و اگر جنگلی از k درخت تشکیل شده باشد، $e = n - k$ است. بنابراین در این گراف‌ها $e < n$ است.
به این ترتیب می‌بینیم که اگر $e = n$ یا $e > n$ باشد گراف G دارای حداقل یک دور است.

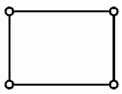
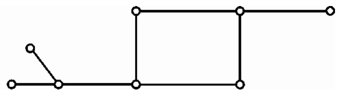
۲۷- گزینه (۱) صحیح است.

فرض کنیم $X = \{1,2,...,n\}$ باشد. تعداد زیرمجموعه‌های X برابر با 2^n است و هرکدام از آن‌ها یکی از رئوس گراف G هستند.
مجموعه‌ی ϕ یکی از رئوس این گراف است و می‌دانیم که اشتراک هر مجموعه‌ای با ϕ برابر با ϕ است پس این رأس با همه‌ی رئوس دیگر مجاور است و در نتیجه همبند بودن گراف G واضح است.
پاسخ تکمیلی: برای آنکه نادرست بودن سایر گزینه‌ها مشخص شود، بهتر است برای یک مقدار کوچک از n مثلاً $n = 3$ گراف G را تصور کنید. هرکدام از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $X = \{1,2,3\}$ یک رأس این گراف هستند:
واضح است که این گراف منظم نیست. مثلاً ϕ با همه رئوس مجاور است اما مجموعه‌ی $X = \{1,2,3\}$ فقط با ϕ مجاور است.



در ضمن همین که X فقط با ϕ مجاور است نشان می‌دهد که یک رأس درجه یک (برگ) وجود دارد پس این گراف همیلتونی نیست. وجود دورهای به طول فرد هم نشان می‌دهد این گراف دو بخشی نیست. مثلاً ϕ و $\{1\}$ و $\{2\}$ تشکیل یک مثلث می‌دهند.

۲۸- گزینه (۲) صحیح است.

گراف G همبند است و فقط یک دور دارد. بنابراین یا دقیقاً همان گراف C_n است (مانند G_1: ) یا از یک دور C_n به همراه یک یا چند درخت که به صورت برشی به آن متصل هستند تشکیل می‌شود (مانند G_2: )
اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه (۱) نادرست است مثلاً در گراف G_1 بین هر دو رأس، 2 مسیر وجود دارد.
گزینه (۳) نادرست است مثلاً G_2 با C_n یکریخت نیست.
گزینه (۴) نادرست است مثلاً در G_1 داریم $n = e = 4$
اما گزینه (۳) صحیح است. در گراف G_1 داریم $\Delta(G) = 2$ و تعداد رئوس درجه یک برابر با صفر است. در گراف G_2 داریم $\Delta(G) = 3$ و این گراف 3 رأس درجه یک دارد.
یادآوری: $\Delta(G)$ نشان‌دهنده‌ی بیشترین درجه‌ی رئوس گراف است.

۲۹- گزینه (۴) صحیح است.

مجموعه‌ای از 4 یال که هیچکدام از آنجا به هم متصل نباشند در واقع یک تطابق 4 عضوی است. طبق متن درس، در گراف $k_{n,m}$ برای آنکه یک تطابق k عضوی داشته باشیم، ابتدا باید k رأس از بخش اول و k رأس از بخش دوم انتخاب کنیم. سپس این رئوس را به $k!$ روش می‌توان بـه هـم متصل کرد.

$$k_{n,m} \text{ تعداد تطابق‌های } k \text{ عضوی در } = \binom{n}{k}\binom{m}{k}k!$$

در این سوال $n = m = 7$ و $k = 4$ است:

$$\text{جواب} = \binom{7}{4}\binom{7}{4}7!$$

۳۰- گزینه (۱) صحیح است.

اگر x و y دو عضو متمایز از مجموعه‌ی $\{1,2,...,7\}$ باشند آنگاه $|x-y|$ عددی بین 1 تا 6 اسـت و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر 7 برابر با خودش است.
پس طبق صورت سوال، x و y مجاور هستند اگر 5 یا 4 یا 3 یا $|x-y| = 2$ باشد. برای مثال رأس $x = 7$ با رئوس $2,3,4,5$ مجاور است و رأس $x = 1$ با رئوس $3,4,5,6$ مجاور است. به همـین ترتیب متوجه می‌شویم که هر رأس با 4 رأس دیگر مجاور است پس G گرافی 4–منـتظم اسـت و همبند است.
در ضمن گراف G ساده اسـت زیـرا طـوق نـدارد مـثلاً رأس 2 بـا خـودش مجـاور نیسـت زیـرا $2-2=0$ می‌شود و یال‌های G هم جهت‌دار نیستند زیرا $\{x,y\}$ با $\{y,x\}$ تفاوتی ندارد.
پس گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) صحیح هستند.
نادرست بودن گزینه (۱) را می‌توان با پیدا کردن یک دور به طول فرد در G نشان داد. مثلاً رئـوس 2 و 4 و 6 تشکیل یک مثلث می‌دهند.

۳۱- گزینه (۲) صحیح است.

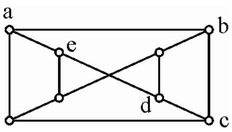
روش اول:

هر گرافی که فقط با استفاده از 2 رنگ قابل رنگ‌آمیزی باشد، 2 بخشی است.

اگر رئوس این گراف‌ها را رنگ‌آمیزی کنید خواهید دید که گراف‌های G_1 و G_2 فقط با 2 رنگ قابل رنگ‌آمیزی هستند اما در گراف G_3 حداقل به 3 رنگ نیاز پیدا می‌کنیم. پس فقط G_1 و G_2 دو بخشی هستند.

روش دوم:

گرافی که دوری به طول فرد داشته باشد دو بخشی نیست. در گراف‌های G_1 و G_2 همه‌ی دورها به طول زوج هستند اما در گراف G_3 دور به طول فرد وجود دارد. مثلاً مطابق شکل دور abcdea دوری به طول 5 در G_3 است. پس G_3 دو بخشی نیست.



۳۲- گزینه (۴) صحیح است.

همه‌ی گراف‌ها دارای 6 رأس هستند.

گراف (ب) دارای رأس درجه 2 و رأس درجه 4 است اما سایر گراف‌ها همگی 3-منتظم هستند پس (ب) با سایر گزینه‌ها یکریخت نیست.

گراف‌های (الف) و (ج) دارای دورهایی به طول 3 هستند در حالی که گراف (د) هیچ دوری به طول 3 ندارد. پس گراف (د) با سایر گزینه‌ها یکریخت نیست. به این ترتیب فقط گراف‌های (الف) و (ج) می‌توانند یکریخت باشند.

۳۳- گزینه (۴) صحیح است.

گرافی که با مکمل خودش یکریخت باشد، گراف خود مکمل نام دارد. همانطور که در متن درس توضیح داده‌ایم، اگر G گرافی خود مکمل باشد آنگاه $n = 4k$ یا $n = 4k+1$ خواهد بود.

پس فقط گزینه (۴) صحیح است:

$19 = 4(4)+3$

$31 = 4(7)+3$

$30 = 4(7)+2$

$21 = 4(5)$

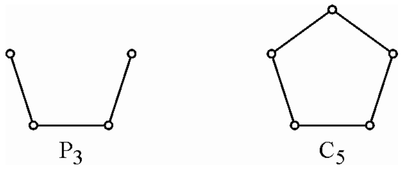
۳۴- گزینه (۲) صحیح است.

به سادگی می‌توان دید که گراف سمت چپ، همان گراف $k_{3,3}$ است. بنابراین گراف سمت راست هم یکریخت (ایزومورف) با $k_{3,3}$ است. طبق متن درس، تعداد یکریختی‌ها بین دو گراف $k_{3,3}$ برابر با $2\times 3!\times 3! = 72$ است.

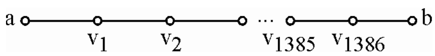
یادآوری: تعداد یکریختی برای گراف $k_{n,m}$ که $n \neq m$ باشد $n!m!$ و اگر $n=m$ باشد، $2n!n!$ است.

۳۵- گزینه (۴) صحیح است.

گراف G را خود مکمل می‌نامیم اگر G با مکمل خودش یکریخت باشد. می‌دانیم که تعداد رئوس یک گراف خود مکمل باید $n=4k$ یا $n=4k+1$ باشد. در ضمن مسیر ساده‌ی P_3 که 3 یال و 4 رأس دارد، و گراف C_5 که 5 یال و 5 رأس دارد از مثال‌های معروف خود مکمل هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.



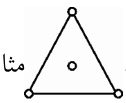
حالا گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم. گراف G با 1388 رأس را در نظر بگیرید. فرض کنید گراف G دو رأس مانند a و b داشته باشد که فاصله‌ی آن‌ها 1387 باشد. پس در مسیر از a تا b تعداد رئوس میانی 1386 تا است که به همراه a و b همه‌ی 1388 رأس G را تشکیل می‌دهند.



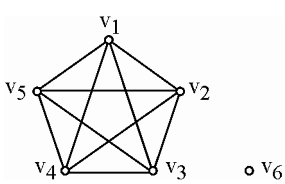
پس مسیر ساده‌ی از a تا b نشان‌دهنده‌ی همه‌ی رئوس و یال‌های G است. هیچ حالت دیگری برای G وجود ندارد. پس گزینه (۴) صحیح است.

۳۶- گزینه (۳) صحیح است.

گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱) گزینه (۱) نادرست است زیرا می‌توانیم گرافی مانند  مثال بزنیم که دنباله‌ی درجات آن $2,2,2,0$ است اما دوبخشی نیست زیرا دوری به طول فرد دارد.

۲) گزینه (۲) نادرست است. برای بررسی آن، گرافی با 6 رأس $v_1,...,v_5,v_6$ در نظر بگیرید حالا همه‌ی 10 یال را می‌توان طوری در نظر گرفت که بین $v_1,...,v_5$ باشند یعنی v_6 به سایر رئوس متصل نباشد. پس گرافی ناهمبند با این شرایط وجود دارد.



نکته : اگر گرافی ساده با n رأس و e یال داشته باشیم و $e > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که G همبند است.

در گزینه (۲) این نامساوی برقرار نیست.

۳) اگر G گرافی n رأسی و m–منتظم باشد، آنگاه مکمل G یعنی $\overline{G}$ گرافی n رأسی و $n-1-m$– منتظم است. دلیل این امر آن است که G و $\overline{G}$ روی هم گراف k_n را ایجاد می‌کنند و در نتیجه $\deg_G V + \deg_{\overline{G}} v = n-1$ است.

با این توضیحات می‌بینیم که:

تعداد گراف‌های n رأسی و m منتظم، برابر است با تعداد گراف‌های n رأسی و $n-1-m$ منتظم.

پس اگر $n = 11$ باشد، تعداد گراف‌های 8–منتظم با تعداد گراف‌های 2–منتظم برابر است.

می‌دانیم که هر گراف 2–منتظم باید از یک یا چند دور ساده مجزا تشکیل می‌شود. پس حالات ممکن برای گراف 2–منتظم با 11 رأس این‌ها هستند:

$C_{11}\ ,\ C_6 + C_5\ ,\ C_4 + C_4 + C_3\ ,\ C_3 + C_3 + C_5\ ,\ C_3 + C_8\ ,\ C_4 + C_7$

بنابراین 6 گراف با این ویژگی وجود دارد. گزینه (۳) صحیح است.

۴) گزینه (۴) نادرست است زیرا در هر گراف ساده، تعداد رئوس با درجه‌ی فرد باید زوج باشد.

یادآوری: گراف ساده‌ی m منتظم با n رأس به شرطی وجود دارد که nm زوج باشد. (شرط لازم)

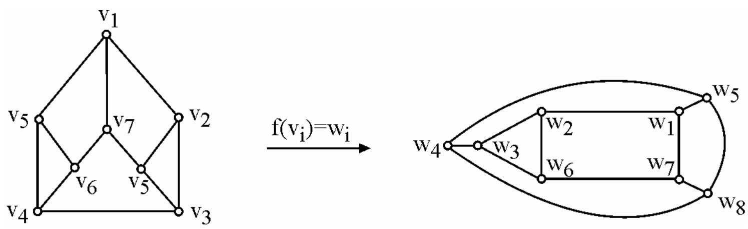
۳۷- گزینه (۱) صحیح است.

هر دو گراف از 8 رأس با درجه 3 تشکیل شده‌اند پس گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

با بررسی ویژگی‌هایی از قبیل دنباله‌ی درجات، تعداد مثلث‌ها، تعداد دورهای به طول 4، عدد رنگی، ... می‌بینیم که گراف‌های H_1 و H_2 از هر لحاظ مانند هم هستند. پس به نظر می‌رسد که با هم یکریخت (ایزومورف) هستند.

توجه: تنها راه اثبات یکریخت بودن دو گراف به صورت علمی، آن است که یک تابع یکریختی (ایزومورفیسم) بین آن‌ها پیدا کنیم.

در شکل زیر یک تابع یکریختی $f:H_1 \to H_2$ را نشان داده‌ایم.



این تابع v_1 را به w_1 و ... و v_8 را به w_8 نظیر می‌کند.

می‌توانید تحقیق کنید که f یک ایزومورفیسم است. مثلاً v_5, v_4 و v_8 تشکیل یک مثلث می‌دهند

و در گراف H_2 هم w_5, w_4 و w_8 تشکیل یک مثلث (دور به طول 3) داده‌اند.

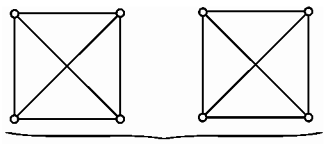
۳۸- گزینه (۳) صحیح است.

گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱) گزینه (۱) نادرست است. برای مثال می‌دانیم که گراف k_9 دارای $36 = \frac{9 \times 8}{2}$ یال است.

حالا اگر یک رأس درجه یک به k_9 اضافه کنیم گرافی با 10 رأس و 37 یال به دست می‌آید که همیلتونی نیست زیرا دارای برگ (رأس درجه یک) است.

۲) گزینه (۲) نادرست است. این گراف ممکن است از دو مولفه‌ی همبند که هرکدام k_4 هستند تشکیل شده باشد پس لزوماً همبند نیست.



G

۳) هر گراف 2 منتظم، از یک یا چند دور $(m \geq 3) C_m$ تشکیل می‌شود پس برای گراف 2 منتظم با 10 رأس، حالت‌های زیر ممکن است:

C_{10} , $C_3 + C_7$, $C_4 + C_6$, $C_5 + C_5$, $C_3 + C_3 + C_4$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۴) از الگوریتم هاول- حکیمی برای بررسی وجود این گراف استفاده می‌کنیم:

5 , 5 , 4 , 4 , 3 , 3 , 2 , 2 , 1 , 1

اولین 5 را حذف کرده از 5 عدد بعدی هرکدام یک واحد کم می‌کنیم:

4 , 3 , 3 , 2 , 2 , 2 , 2 , 1 , 1

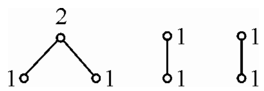
4 را حذف کرده و از 4 عدد بعدی هرکدام یک واحد کم می‌کنیم:

$$2 , 2 , 1 , 1 , 2 , 2 , 1 , 1 \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} 2 , 2 , 2 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1$$

2 را حذف می‌کنیم و از 2 عدد بعدی یک واحد کم می‌کنیم:

$$1 , 1 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1 \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} 2 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1$$

می‌توانیم ادامه بدهیم اما این گراف به وضوح قابل ترسیم است:



پس گرافی ساده با دنباله‌ی درجات داده شده وجود دارد. گزینه (۴) صحیح نیست.

۳۹- گزینه (۴) صحیح است.

گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱) گراف $k_{n,m}$ به شرطی مسطح است که $n \le 2$ یا $m \le 2$ باشد. پس $k_{3,4}$ مسطح نیست.

۲) اگر G گرافی ساده و 2 بخشی با N رأس باشد، حداکثر تعداد یال‌های G برابر با $(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{4}$ است. در واقع در گراف‌های دو بخشی با N رأس، اگر N زوج باشد، $e \le \frac{N^2}{4}$ و اگر N فرد باشد $e \le \frac{N^2-1}{4}$ است.

پس، شرط $e > \frac{N^2}{4}$ نشان می‌دهد که گراف G دو بخشی نیست.

۳) در متن درس توضیح داده‌ایم که تنها دور ساده‌ی C_n که با مکمل خودش یکریخت است، C_5 است.

۴) از الگوریتم هاول – حکیمی استفاده می‌کنیم:

$7, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1$

حذف عدد 7 و کم کردن یک واحد از 7 عدد بعدی:

$4,3,2,1,0,0,0$

حذف عدد 4 و کم کردن یک واحد از 4 عدد بعدی:

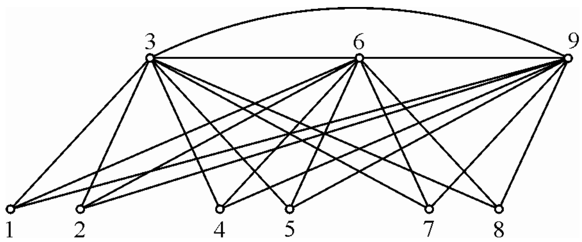
$2,1,0,-1,0,0$

مقدار منفی به وجود آمد پس این گراف وجود ندارد. (دنباله‌ی درجات داده شده، ترسیمی نیست)

۴۰- گزینه (۳) صحیح است.

3 یک عدد اول است و به حاصل‌ضرب 2 عامل کوچکتر تجزیه نمی‌شود بنابراین اگر $x \times y$ بخواهد مضرب 3 باشد آنگاه x یا y باید مضرب 3 باشند.

به این ترتیب می‌بینیم که در این گراف رئوس 9 و 6 و 3 به همه‌ی رئوس دیگر متصل هستند و سایر رئوس هم فقط به این 3 رأس متصل هستند.



تعداد یال‌های G برابر است با تعداد یال‌های گراف $k_{3,6}$ به همراه 3 یال دیگر که رئوس 3 و 6 و

9 را به هم متصل کرده‌اند:

$e = 3\times 6+3 = 21$

گراف G دو بخشی نیست زیرا دور به طول فرد دارد. مثلاً 3 و 6 و 9 تشکیل یک مثلث می‌دهند.
گراف G مسطح نیست زیرا در آن زیر گرافی یکریخت با $k_{3,3}$ وجود دارد. اگر رئوس $X = \{3,6,9\}$ را در یک بخش و رئوس $Y = \{1,2,4\}$ را در بخش دیگر فرض کنید، یال‌هایی که بین این دو بخش قرار دارند تشکیل $k_{3,3}$ را می‌دهند.
بنابراین گزینه (۳) حکم نادرستی است.
در ضمن با کمی صرف وقت می‌توانید ببینید که G دور همیلتونی ندارد.

۴۱- گزینه (۴) صحیح است.

طبق فرض این دنباله به صورت نزولی نوشته شده است بنابراین $4 \ge x \ge y \ge 2$ است.
تعداد رئوس با درجه‌ی فرد باید همواره زوج باشد پس x و y یا هر دو فرد هستند، یا هر دو زوج هستند:

حالت اول: اگر x و y هر دو فرد باشند آنگاه $x = y = 3$ است و دنباله‌ی درجات به این صورت خواهد بود:

$5,5,4,3,3,2$

با الگوریتم هاول – حکیمی، ترسیمی بودن این دنباله را بررسی می‌کنیم:

حذف 5 : $4,3,2,2,1$

حذف 4 : $2,1,1,0$

حذف 2 : $0,0,0$

این دنباله، ترسیمی است. پس حالت $x = y = 3$ قابل قبول است.

توجه: در همین مرحله معلوم می‌شود که گزینه‌ی (۴) حکم نادرستی است. پس جواب تست گزینه‌ی (۴) است. با این حال برای کامل بودن پاسخ تشریحی، بررسی را ادامه می‌دهیم.

حالت دوم: اگر x و y هر دو زوج باشند، وضعیت‌های مختلفی رخ می‌دهد:

$x = 4, y = 2$ یا $x = y = 4$ یا $x = y = 2$

اما استفاده از الگوریتم هاول حکیمی نشان می‌دهد که بجز $x = y = 4$ بقیه آن‌ها ترسیمی نیستند.
برای مثال ما وضعیت $x = 4$ و $y = 2$ را بررسی می‌کنیم:

$$5,5,4,4,2,2 \xrightarrow{\text{حذف } 5} 4,3,3,1,1$$
$$\xrightarrow{\text{حذف } 4} 2,2,0,0 \xrightarrow{\text{حذف } 2} 1,-1,0$$

عدد منفی بوجود آمد که نشان می‌دهد این دنباله ترسیمی نیست.
به این ترتیب تنها حالت ممکن همان $x = y = 3$ و $x = y = 4$ است. دنباله‌ی درجات گراف G به

این صورت خواهد بود: $5,5,4,4,4,2$ یا $5,5,4,3,3,2$

تعداد یال‌های G برابر است با مجموع درجات، تقسیم بر 2:

$$e=\frac{5+5+4+3+3+2}{2}=11 \quad \text{یا} \quad e=12$$

در ضمن گراف G قطعاً مسطح است. زیرا در آن زیر گرافی یکریخت با k_5 یا یکریخت بـا $k_{3,3}$ وجود ندارد. برای وجود k_5 باید لااقل 5 رأس با درجه‌ی حداقل 4 موجـود باشـد. بـرای وجـود $k_{3,3}$ باید لااقل 6 رأس با درجه حداقل 3 موجود باشد.

۴۲- گزینه (۱) صحیح است.

بررسی اویلری بودن و دو بخشی بودن بسیار ساده است. ابتدا این دو ویژگی را بررسی می‌کنیم.

بررسی اویلری بودن: گراف G اویلری است اگر و تنها اگر همبنـد باشـد و همـه درجـات آن زوج باشند. گراف‌های G_1 و G_2 هر دو اویلری هستند زیرا درجه همه‌ی رئوس آن‌ها 4 است.

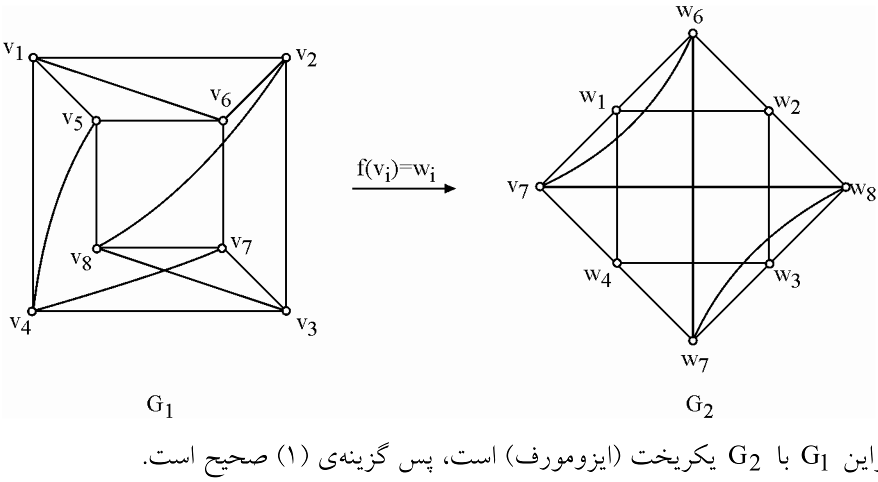
بررسی دو بخشی بودن: گرافی G دو بخشی است اگر و تنها اگر دور به طول فرد نداشته باشد.

گراف‌های G_1 و G_2 هر دو دارای دور به طول 3 هستند پس هیچکدام از آن‌ها دو بخشی نیستند.

بررسی همیلتونی بودن: به وضوح در هر دو گراف می‌توان دور همیلتونی پیدا کرد.

در گـــراف G_1 دور $v_1v_2v_3v_4v_7v_8v_5v_6v_1$ همیلتـــونی اســـت و در گـــراف G_2 دور $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ همیلتونی است.

بررسی یکریخت بودن: با توجه به آنکه تا اینجا همه‌ی ویژگی‌های G_1 و G_2 مانند هم بوده است. به نظر می‌رسد G_1 و G_2 یکریخت باشند. با کمی دقت می‌توانید تابع یکریختی زیر را بین G_1 و G_2 پیدا کنید. در شکل زیر تابع $f:G_1\to G_2$ با ضابطه‌ی $f(v_i)=w_i$ یک یکریختی است:



بنابراین G_1 با G_2 یکریخت (ایزومورف) است، پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

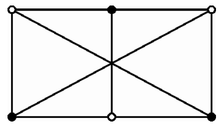
به بررسی مسطح بودن نیازی نداریم اما اگر از قضیه‌ی تغییر مبنا استفاده کنید، زیر گراف یکریخت با $k_{3,3}$ را در هر دو گراف G_1 و G_2 پیدا می‌کنید پس G_1 و G_2 مسطح نیستند.

۴۳- گزینه (۳) صحیح است.

گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

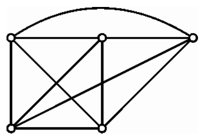
۱) این گزینه دقیقاً k_5 است و مسطح نیست. (k_n برای $n \geq 5$ مسطح نیست)

۲) با رنگ‌آمیزی رأس‌ها می‌توانید رئوس این گراف را به دو بخش 3 عضوی تفکیک کنید. به این ترتیب متوجه می‌شویم که این گراف دقیقاً $k_{3,3}$ است پس مسطح نیست. ($k_{n,m}$ که در آن $n \geq 3$ و $m \geq 3$ مسطح نیست)



۳) این گراف دارای زیر گرافی یکریخت با k_5 نیست زیرا برای وجود k_5 باید حداقل 5 رأس با درجه حداقل 4 داشته باشیم که چنین نیست. همچنین زیر گرافی یکریخت با $k_{3,3}$ وجود ندارد زیرا برای وجود $k_{3,3}$ باید حداقل 6 رأس با درجه‌ی حداقل 3 داشته باشیم که چنین نیست. پس گزینه (۳) گرافی مسطح است.

۴) این گراف دارای زیر گرافی یکریخت با k_5 است پس مسطح نیست. برای یافتن k_5 کافیست مطابق شکل رأس درجه 3 را از گراف حذف کنید:



۴۴- گزینه (۳) صحیح است.

هر کدام از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{a,b,c\}$ نظیر یک 3 تایی مرتب از ارقام 0 و 1 است. مثلاً $(0,0,0)$ معادل مجموعه‌ی $\phi = \{\}$ است و $(1,0,0)$ معادل با $\{a\}$ و $(0,1,0)$ معادل با $\{b\}$. به همین ترتیب سه تایی مرتب $(1,1,1)$ معادل با مجموعه‌ی 3 عضوی $\{a,b,c\}$ است.

هنگامی که $A \Delta B$ تک عضوی باشد، مجموعه‌های A و B فقط در یک عنصر با هم تفاوت دارند. مثلاً مجموعه‌های $A = \{a,b\}$ و $B = \{b\}$ که معادل با سه تایی‌های مرتب $(1,1,0)$ و $(0,1,0)$ هستند فقط در یک عضو باهم تفاوت دارند و به همین دلیل مجاور هستند. با این توضیحات می‌بینید که گراف G دقیقاً همان گراف 3-مکعب است $(G \simeq Q_3)$.

طبق متن درس، گراف Q_3 گرافی همیلتونی، 3-منتظم و مسطح است.

این گراف اویلری نیست زیرا رئوس آن از درجه‌ی فرد هستند.

برای اطلاعات کامل‌تر، مبحث گراف‌های k-مکعب را از متن درس مطالعه کنید.

۴۵- گزینه (۴) صحیح است.

حالت کلی‌تری از مسأله را شرح می‌دهیم. گرافی با n رأس در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که Δ و δ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بیشترین درجه و کمترین درجه رئوس یک گراف هستند.

می‌دانیم که برای هر رأس مانند v، مجموع درجه v در G و درجه‌ی v در $\overline{G}$ برابر با $n-1$ است.

$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=n-1$

هرچه درجه‌ی v در $\overline{G}$ بیشتر باشد، درجه‌ی آن در G کمتر خواهد بود. حالا اگر $\Delta(\overline{G})=n-3$ باشد یعنی $\deg_{\overline{G}}(v)\le n-3$ پس:

$\deg_G(v)=n-1-\deg_{\overline{G}}(v)\ge 2$

پس درجه‌ی همه‌ی رئوس در G حداقل برابر با 2 است. به عبارتی G یک درخت یا جنگل نیست زیرا برگ ندارد. از اینجا معلوم می‌شود که G حداقل یک دور دارد.

مسأله‌ی فوق، حالت خاصی از این مطلب است که در آن $n=1385$ می‌باشد.

۴۶- گزینه (۱) صحیح است.

گزاره‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

A) این حکم غلط است. البته عکس آن به شرط همبند بودن G درست است.

یعنی در گراف همبند G اگر درجه‌ی هر رأس حداقل $\frac{n}{2}$ باشد آنگاه G همیلتونی خواهد بود.

برای رد کردن گزینه (۱) کافیست C_5 را مثال بزنید.

B) این گزینه هم با توجه به همان مثال نقض C_5 رد می‌شود. C_5 همیلتونی است و 5 رأس دارد اما همه رئوس آن درجه 2 هستند. البته عکس این حکم صحیح است.

C) این گزینه هم نادرست است زیرا شرط همبند بودن G را از قلم انداخته است. اگر G همبند باشد و تمام رئوس آن از درجه‌ی زوج باشند آنگاه اویلری خواهد بود.

D) با توجه به نادرست بودن سایر گزینه‌ها، پاسخ گزینه (۱) خواهد بود. اما اثبات درست بودن این حکم قدری مشکل است.

فرض کنیم گراف G همبند با n رأسی باشد و درجه‌ی هر رأس آن حداقل 5 باشد. در این صورت در مورد تعداد یال‌ها می‌توان نامساوی زیر را تشکیل داد:

$$e=\frac{\text{مجموع درجات}}{2}\ge\frac{5n}{2}=3n-\frac{n}{2}$$

پس اگر تعداد رئوس، $n>12$ باشد نتیجه می‌گیریم $e>3n-6$ و این نامساوی ثابت می‌کند که G مسطح نیست.

اگر تعداد رئوس $n\le 12$ باشد می‌توان نشان داد که گراف G زیر گرافی یکریخت با k_5 دارد و در نتیجه نامسطح است.

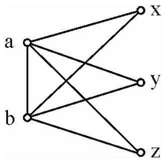
برای مثال اگر $n=6$ باشد و درجه‌ی هر رأس 5 باشد، گراف موردنظر دقیقاً k_6 است و نامسطح خواهد بود.

۴۷- گزینه (۴) صحیح است.

ابتدا مقدار x را تعیین می‌کنیم. می‌دانیم که مجموع همه‌ی درجات، تقسیم بر 2، برابر است با تعداد یال‌ها:

$$\frac{4+4+2+2+x}{2}=7 \Rightarrow x=2$$

پس گرافی با دنباله‌ی درجات 4,4,2,2,2 داریم که در مجموعه 7 یال دارد. این گراف به سادگی قابل رسم است.



اکنون بررسی گزینه‌ها بسیار ساده است.

گراف G همبند است. همچنین اویلری است زیرا همه‌ی درجات آن زوج هستند. G مسطح است زیرا هیچ زیرگرافی یکریخت با $k_{3,3}$ یا k_5 در آن وجود ندارد.

اما G همیلتونی نیست زیرا خیلی دوری همیلتونی وجود ندارد که از همه رئوس درجه x , y و z که درجه 2 هستند عبور کند.

۴۸- گزینه (۲) صحیح است.

گزینه‌ی (۱) اصلاً ترسیمی نیست زیرا تعداد رئوس درجه‌ی فرد آن، زوج نیست. در واقع گراف ساده‌ای با این دنباله درجات وجود ندارد.

در مورد سایر گزینه‌ها، بررسی ترسیمی بودن با استفاده از الگوریتم هاول – حکیمی وقت‌گیر است. اما از این نکته استفاده می‌کنیم که در هر گراف مسطح، باید $e \le 3n-6$ باشد.

در گزینه (۲)، تعداد رئوس $n=10$ است و تعداد یال‌ها به این صورت قابل محاسبه است:

$$e=\frac{\text{مجموع درجات}}{2}=\frac{44}{2}=22$$

پس نامساوی $e \le 3n-6$ برقرار است.

اما در گزینه‌های (۳) و (۴) این نامساوی برقرار نیست.

پس فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۴۹- گزینه (۲) صحیح است.

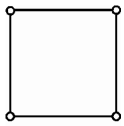
طبق تعریف داده شده، اگر a خودش مضرب 6 باشد (مثلاً $a=6$ یا $a=12$ یا $a=18$) آنگاه b

می‌تواند هرکدام از رئوس دیگر باشد. زیرا ab مضرب 6 خواهد بود. پس رئـوس 6 و 12 و 18 بـا همه‌ی رئوس دیگر مجاور هستند. پس در گراف مکمل G یعنی در $\overline{G}$ درجه‌ی ایـن 3 رأس برابـر با صفر است.
در نتیجه $\overline{G}$ ناهمبند است. بررسی سایر گزینه‌ها لازم نیست و ممکن است بسیار وقت‌گیر باشد.

۵۰- گزینه (۴) صحیح است.

روش کوتاه:
چند جمله‌ای رنگی هیچ گرافی جمله‌ی ثابت غیرصفر ندارد. پس گزینـه‌هـای (۱) و (۲) نادرسـت هستند. در چند جمله‌ای رنگی، علامت جملات بایـد یکـی در میـان تغییـر کنـد پـس گزینـه (۳) نادرست است. فقط گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

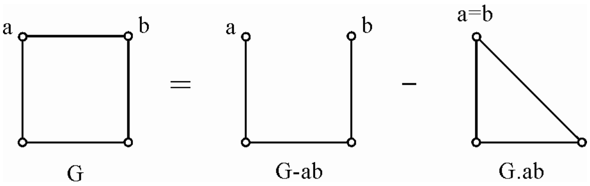
روش کوتاه دوم:
اگر تعداد رنگ‌ها $\lambda = 0$ باشد یا تعداد رنگ‌ها $\lambda = 1$ باشد، هیچ راهی برای رنـگ‌آمیـزی رأس‌هـا وجود ندارد پس با جایگذاری $\lambda = 0$ و $\lambda = 1$ باید مقدار $P(\lambda)$ برابر با صفر باشد. فقط گزینـه‌ی (۴) این ویژگی را دارد.



C_4

پاسخ تشریحی:
گراف C_4 نه درخت است و نه گراف کامل است. یال و رأس برشی هم نـدارد. بنـابراین یکـی از یال‌ها مانند $e = ab$ را انتخاب کرده و از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(G,\lambda) = P(G-ab,\lambda) - P(G.ab,\lambda)$$



گراف $G-ab$ یک درخت است و گراف $G.ab$ یک گراف کامل است.

$$\Rightarrow\ P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1) + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 + \lambda - 2\right]$$

با انجام محاسبات داریم:

$$P(G,\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$$

۵۱- گزینه (۳) صحیح است.

چند جمله‌ای رنگی هر گراف که n رأس دارد، به صورت:

$P(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} - ... \pm a_1\lambda$

است.

– ضریب λ^n باید برابر با یک باشد. (پس گزینه (۱) نادرست است)

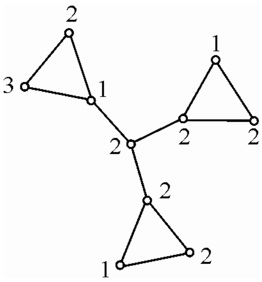
– جمله‌ی ثابت برابر با صفر است یعنی $a_0 = 0$ است. پس گزینه (۴) نادرست است.

– به جزء گراف تهی که هیچ یالی ندارد و چند جمله‌ای رنگی آن λ^n است، در سایر گراف‌ها، به ازای $\lambda = 1$ باید $P(1) = 0$ باشد زیرا با داشتن فقط یک رنگ، نمی‌توان گراف را رنگ‌آمیزی کرد. پس گزینه (۳) نادرست است.

فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۵۲- گزینه (۲) صحیح است.

گراف G از 3 گراف کامل k_3 که به صورت برشی به هم متصل هستند تشکیل شده است پس می‌توانیم از یک رأس دلخواه آغاز کنیم و تعداد انتخاب‌ها برای رنگ‌آمیزی هر رأس را در کنارش بنویسیم. در پایان با استفاده از قاعده‌ی ضرب، تعداد کل حالات به دست می‌آید:

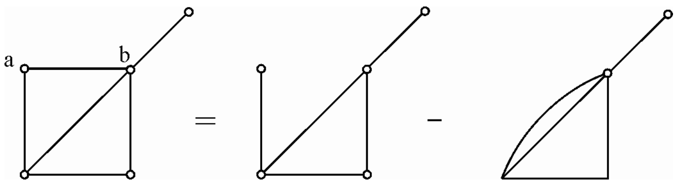


جواب $= 3 \times 2^6$

۵۳- گزینه (۳) صحیح است.

این گراف دارای دور است اما گراف کامل نیست. یکی از یال‌ها مانند $e = ab$ را انتخاب کرده و از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(G,\lambda) = P(G-ab,\lambda) - P(G.ab,\lambda)$$



$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1) - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)$$
$$= \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)\left[(\lambda-1)-1\right] = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

توجه مهم: اگر بدون استفاده از این قضیه از روی همان گراف اولیه، بخواهیم تعداد انتخاب‌ها را بشماریم، دچار خطا شده‌ایم و ممکن است به جواب غلط برسیم. در واقع جوابمان بستگی به این پیدا می‌کند که از کدام رأس شروع به رنگ‌آمیزی کنیم. این کار غلط است. هرگاه G شامل دور بود اما گراف کامل نبود، حتماً از قضیه فوق استفاده کنید.

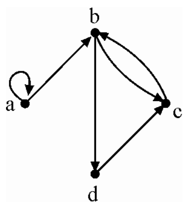
۵۴- گزینه (۴) صحیح است.

اگر رئوس گراف را به ترتیب با c, b, a و d نشان دهیم.

با توجه به درایه‌هایی که برابر با یک هستند می‌توان یال‌های گراف را رسم کرد.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

با رسم گراف می‌بینیم که این گراف همبند (متصل)، و مسطح و دارای دور است.



توجه: طبق تعریف، گراف جهت‌دار G را همبند (متصل) می‌گوییم اگر بدون در نظر گرفتن جهت یال‌ها، متصل باشد.

۵۵- سؤال دارای ایراد علمی است.

اگر i و j فرد باشند $i+j$ زوج می‌شود پس $a_{ij} = 0$.

اگر هر دو زوج باشند باز هم $i+j$ زوج می‌شود پس $a_{ij} = 0$.

اما اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد $i+j$ فرد می‌شود پس $a_{ij} = 1$ خواهد بود.

پس G گرافی دوبخشی است که در بخش X رئوس فرد و در بخش Y رئوس زوج وجود دارند و هر $x \in X$ با هر $y \in Y$ مجاور است.

اگر n زوج باشد مثلاً $n = 1384$ باشد آنگاه $|X| = |Y| = 692$ و G گراف $K_{692,692}$ است که مسطح نیست چون هر دو بخش آن بزرگتر مساوی 3 هستند. اما سایر ویژگی‌ها را دارد ولی اگر n فرد باشد آنگاه $|X| \neq |Y|$ مثلاً برای $n = 1385$ داریم:

$$|X| = 693 \,,\, |Y| = 692$$

پس گراف نه مسطح است نه منظم و نه همیلتونی.

در این سؤال اگر شرط زوج بودن n داده می‌شد گزینه (۲) جواب بود.

۵۶- گزینه (۴) صحیح است.

اگر A ماتریس مجاورت باشد، قطر اصلی ماتریس A^2 نشان‌دهنده‌ی درجات رئوس گراف است. بنابراین:

$$2e = \text{مجموع همه درجات} = \text{مجموع قطر اصلی } A^2$$

این گراف دارای 14 یال است بنابراین مجموع همه درجات، $2\times14=28$ است.

۵۷- گزینه (۱) صحیح است.

همانطور که در متن درس آمده است، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^3 با تعداد دورهای به طول 3 (مثلث‌ها) در رابطه است:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \frac{tr(A^3)}{6}$$

این گراف هیچ مثلثی ندارد پس $tr(A^3)=0$ است.

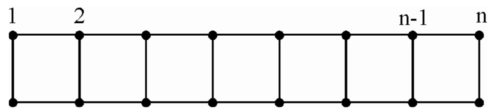
۵۸- گزینه (۱) صحیح است.

تطابق کامل در گراف k_8 باید از $k=\frac{8}{2}=4$ یال تشکیل شود. پس تعداد این تطابق‌ها $\frac{1}{4!}\frac{8!}{2^4}=105$ است.

یادآوری: تعداد تطابق‌هایی که از k یال تشکیل شده‌اند، در گراف k_n از فرمول $\frac{n!}{k!2^k}$ به دست می‌آید. تطابق کامل باید شامل $k=\frac{n}{2}$ یال باشد و به شرطی وجود دارد که n زوج باشد.

۵۹- گزینه (۳) صحیح است.

طبق متن درس، در گراف نردبانی اگر رئوس ردیف بالا به صورت $1,2,...,n$ شماره‌گذاری شوند، آنگاه تعداد تطابق‌های کامل از دنباله‌ی فیبوناتچی به دست می‌آید. البته با این مقادیر اولیه: $F_1=1$ و $F_2=2$.



$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

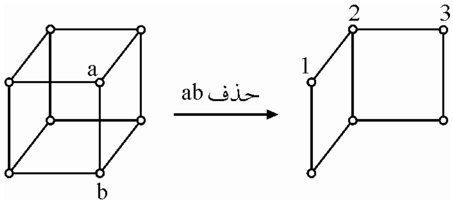
در این مثال مقدار F_8 را می‌خواهیم:

$$1,2,3,5,8,13,21,34 \Rightarrow F_8=34$$

۶۰- گزینه (۲) صحیح است.

رأس a را در نظر بگیرید. تطابق کامل باید یکی از یال‌های مرتبط با a را شامل باشد. 3 انتخاب

وجود دارد. فرض کنید یال $e=ab$ را انتخاب کنیم. با حذف یال‌های مرتبط بـه a و b بـه گرافـی می‌رسیم که در واقع یک گراف نردبانی است.



حالا تعداد تطابق‌های گراف نردبانی که رئوس ردیف بـالای آن $1,2,3$ باشـند از رابطـه بازگشـتی فیبوناتچی با شرایط اولیه $F_1=1$ و $F_2=2$ به دست می‌آید. پس $F_3=1+2=3$ است.
با استفاده از قاعده‌ی ضرب داریم:

$3\times3=9=$ تعداد تطابق‌های کامل

۶۱- گزینه (۳) صحیح است.
می‌دانیم که گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر بتوان آن را با 2 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. یعنی عدد رنگی آن برابر با 2 باشد.
درخت‌ها و دورهای به طول زوج مانند C_4 مثال‌هایی از گراف دو بخشی هستند.
دورهای به طول فرد مانند C_5 برای رنگ‌آمیزی بـه حـداقل 3 رنـگ نیـاز دارنـد پـس دو بخشـی نیستند.
برای رنگ‌آمیزی گراف کامل n رأسی (k_n) حداقل به n رنگ نیاز داریم یعنی به تعداد رئـوس آن رنگ‌های مختلف لازم داریم. با این توضیحات می‌بینید که گزینه (۳) حکم غلطی است.

۶۲- گزینه (۲) صحیح است.
گراف ساده‌ای که دور (حلقه) نداشته باشد یک جنگل است با k مولفه‌ی همبند که هرکدام از آن‌ها یک درخت هستند. در این جنگل، رابطه‌ی بین تعداد یال‌ها و تعداد رئوس بـه صـورت $e=n-k$ بیان می‌شود.
طبق صورت سوال $k=10$ است پس: $e=n-10$. از طرفی می‌دانیم که در هر گراف ساده، تعداد یال‌ها برابر با نصف مجموع درجات رئوس است. پس $e=\frac{100}{2}=50$ در نتیجه:

$50=n-10 \Rightarrow n=60$

۶۳- گزینه (۲) صحیح است.
چند جمله‌ای رنگی یـک درخـت بـا n رأس بـه صـورت $P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ اسـت. λ تعـداد رنگ‌های موجود را نشان می‌دهد و $P(\lambda)$ تعداد حالات ممکن برای رنگ‌آمیزی رئـوس اسـت. بـا

جایگذاری $n = 20$ و $\lambda = 3$ داریم: $P(3) = 3\times 2^{19}$

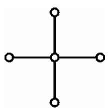
۶۴- گزینه (۱) صحیح است.

این درخت دارای n رأس درجه 4 و m رأس درجه یک است. در هر گراف ساده، مجموع همه درجات برابر با 2 برابر تعداد یال‌هاست پس: $4n + m = 2e$

از طرفی در هر درخت، تعداد یال‌ها یکی کمتر از تعداد رئوس است پس: $e = n + m - 1$ با توجه به این دو معادله داریم:

$$4n + m = 2(n + m - 1) \Rightarrow m = 2n + 2$$

روش کوتاه:



اگر $n = 1$ باشد یعنی فقط یک رأس درجه 4 داشته باشیم، تعداد رئوس درجه یک برابر با $m = 4$ خواهد بود. پس فقط گزینه (۱) صحیح است.

۶۵- گزینه (۴) صحیح است.

کوتاهترین مسیرها هم از یک یال تشکیل می‌شوند پس در واقع تعداد همه‌ی مسیرها در درخت T را می‌خواهیم. در هر درخت با n رأس، بین هر جفت از رئوس دقیقاً یک مسیر داریم پس تعداد کل مسیرها برابر با $\binom{n}{2}$ است.

$$n = 10 \Rightarrow \binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45$$

۶۶- گزینه (۱) صحیح است.

گراف G فاقد دور است پس یک جنگل است که k مولفه‌ی همبند دارد و هر مولفه‌ی آن یک درخت است. در این گراف $e = n - k$ خواهد بود.

$$n = 1387\ ,\ k = 421 \Rightarrow e = 1387 - 421 = 966$$

۶۷- گزینه (۴) صحیح است.

برای آنکه گراف n رأسی، همبند باشد، حداقل باید یک درخت باشد یعنی حداقل به $e = n - 1$ یال نیاز داریم.

گراف کامل k_6 دارای $\frac{6\times 5}{2} = 15$ یال است، ما حداقل به 5 تا از آن‌ها نیاز داریم تا گراف را همبند نگه داریم. پس حداکثر 10 یال را می‌توان حذف کرد.

۶۸- گزینه (۱) صحیح است.

فرض کنید n رأس را با شماره‌های $1,2,...,n$ برچسب زده‌ایم. هر درخت برچسب‌دار، در واقع

یک درخت فراگیر از گراف k_n است. تعداد درخت‌های فراگیر گراف کامل برابر با n^{n-2} است.

توجه: با امتحان کردن گزینه‌ها هم می‌توان به جواب رسید اما این کار وقت‌گیر است.

۶۹- گزینه (۳) صحیح است.

کمترین تعداد یال‌ها وقتی به دست می‌آید که هیچکدام از مولفه‌ها دارای دور نباشند. در این حالت گراف G یک جنگل با k مولفه و n رأس است و تعداد یال‌هایش $m = n - k$ خواهد بود. پس در حالت کلی $m \ge n - k$ است.

۷۰- گزینه (۱) صحیح است.

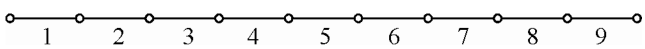
هر مجموعه از 4 یال که رأس مشترک نداشته باشند یک تطابق 4 عضوی است.

روش اول: طبق متن درس، تعداد تطابق‌های k عضوی در P_n از فرمول $\binom{n-k}{k}$ به دست می‌آید.

$$\text{جواب} = \binom{10-4}{4} = \binom{6}{4}$$

توضیح: P_{10} دارای 10 رأس و 9 یال است. ما می‌خواهیم 4 یال را طوری انتخاب کنیم که هیچکدام مجاور نباشند. ابتدا 5 یال را در یک ردیف در نظر می‌گیریم (یال‌ها یکسان هستند). حالا قبل، بعد و مابین این 5 یال، 4 محل را انتخاب کرده و 4 یال دیگر را در محل‌های انتخاب شده قرار می‌دهیم. به همین دلیل تعداد حالات ممکن $\binom{6}{4}$ است.

روش دوم: یال‌ها را مطابق شکل شماره‌گذاری می‌کنیم.



هدف ما انتخاب 4 عدد از این اعداد است که مجاور نباشند. به عبارتی می‌خواهیم 4 تایی (a,b,c,d) را پیدا کنیم که: $1 \le a < b < c < d \le 9$

و اعداد انتخاب شده، حداقل 2 واحد اختلاف داشته باشند.

برای رسیدن به فرم استاندارد، از اعداد سمت راست a، هرکدام یک واحد کم می‌کنیم. به همین ترتب از اعداد سمت راست b، یک واحد کم می‌کنیم.

این کار را ادامه می‌دهیم و در نهایت خواهیم داشت:

$$1 \le a < b-1 < c-2 < d-3 \le 6$$

اکنون به فرم استاندارد رسیده‌ایم و تعداد انتخاب 4 عدد از مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,6\}$ برابر با $\binom{6}{4}$ است.

۷۱- گزینه (۴) صحیح است.

این درخت دارای 9 رأسی است پس باید تعداد یال‌هایش $e=9-1=8$ باشد. از طرفی مجموع درجات برابر با 2 برابر تعداد یال‌ها است در نتیجه:

$$4+r+s+2+t+1+1+1+1+1=2(8) \Rightarrow r+s+t=6$$

در ضمن طبق صورت سوال باید $4\geq r\geq s\geq 2\geq t\geq 1$ باشد پس دو حالت برای این مقادیر ممکن است:

$$(r,s,t)=(2,2,2)$$

$$(r,s,t)=(3,2,1)$$

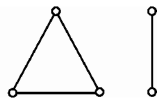
در هر دو حالت $r+t=4$ است.

۷۲- گزینه (۳) صحیح است.

گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) هرکدام شرط لازم و کافی برای درخت بودن یک گراف هستند. (متن درس را مطالعه کنید).

گزینه (۳) نادرست است برای مثال گراف زیر دارای $P=5$ رأس و $P-1=4$ یال است اما درخت نیست:

G:



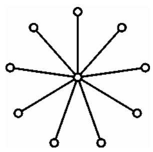
۷۳- همه گزینه‌ها نادرست هستند.

در هر درخت، کمترین درجه‌ی رئوس، برابر با یک است (برگ‌ها) پس $c=1$ خواهد بود. این درخت دارای 10 رأس است پس 9 یال دارد. همه‌ی درجات همواره 2 برابر تعداد یال‌هاست در نتیجه:

$$a+3b+6c=2\times 9 \xrightarrow{c=1} a+3b=12$$

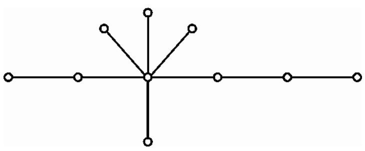
با توجه به اینکه $a\geq b\geq 1$ است، 3 حالت زیر را خواهیم داشت:

$a=9\ ,\ b=1 \Rightarrow$

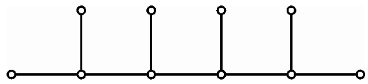


درختی با یک رأس درجه 9 و 9 برگ

$a=6\ ,\ b=2 \Rightarrow$



درختی با یک رأس درجه 6، 3 رأس درجه 2 و 6 برگ

$a=3, b=3 \Rightarrow$ 

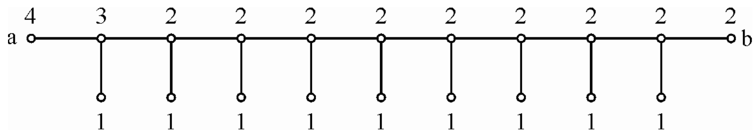
درختی با 4 رأس درجه 3 و 6 برگ

به این ترتیب می‌بینید که همه‌ی گزینه‌ها نادرست هستند.

۷۴- گزینه (۳) صحیح است.

دقت کنید که رنگ‌آمیزی رأسی خواسته شده از نوع استاندارد نیست. وقتی از یک رنگ در رأس V استفاده می‌کنیم، تا دو گام حق استفاده از آن رنگ را نداریم.

برای راحتی بیشتر درخت را به این صورت در نظر بگیرید و ابتدا مسیر مستقیم از a تا b را رنگ‌آمیزی کنید. سپس به سراغ برگ‌های ردیف پایین بروید. تعداد حالات ممکن برای هر رأس را کنارش نوشته‌ایم.



$= 4\times3\times2^{9} = 3\times2^{11}$ جواب

۷۵- گزینه (۴) صحیح است.

یادآوری می‌کنیم $\tau(C_n)=n$ است. در این گراف 4 دور C_3 با یک رأس برشی به هم متصل هستند پس می‌توانیم تعداد درختان فراگیر را در هم ضرب کنیم:

$\tau(G)=\tau(C_3)\,\tau(C_2)\,\tau(C_3)\,\tau(C_3)=3\times3\times3\times3=81$

۷۶- گزینه (۴) صحیح است.

گراف G از یک گراف کامل k_4 و یک دور C_3 که به صورت برشی به هم متصل هستند تشکیل می‌شود. بنابراین داریم:

$\tau(G)=\tau(C_3)\,\tau(k_4)=3\times4^{4-2}=48$

یادآوری: $\tau(C_n)=n$ و $\tau(k_n)=n^{n-2}$

۷۷- گزینه (۴) صحیح است.

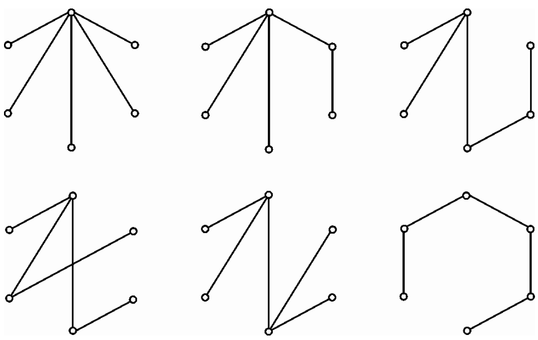
گراف G از دورهای C_3 و C_4 و C_4 و C_3 تشکیل شده که با رئوس برشی به هم متصل شده‌اند. در این حالت می‌توانیم تعداد درختان فراگیر را در هم ضرب کنیم:

$\tau(G)=\tau(C_3)\,\tau(C_4)\,\tau(C_4)\,\tau(C_3)=3\times4\times4\times3=144$

۷۸- گزینه (۱) صحیح است.

گراف k_n دارای n^{n-2} درخت پوشا است اما بسیاری از آن‌ها باهم یکریخت هستند. اگر تعداد درختان غیریکریخت را بخواهیم باید به ساختار آن‌ها توجه کنیم.

در گراف k_6 تعداد درختان پوشا، 6^4 است اما فقط 6 تا از آن‌ها غیریکریخت هستند. سایر درختان پوشا، با یکی از این‌ها یکریخت می‌شوند:

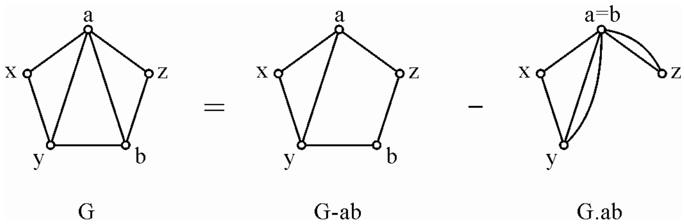


۷۹- گزینه (۱) صحیح است.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر دو دور ساده‌ی C_n و C_m با یک یال مشترک به هم متصل شده باشند، تعداد درختان فراگیر برابر با $nm-1$ است.

در این گراف اگر یال $e=ab$ را حذف کنیم، دورهای C_3 و C_4 با یک یال مشترک باقی می‌مانند. البته باید گراف حاصل از انطباق این و رأس را هم بررسی کنیم.

$\tau(G)=\tau(G-ab)+\tau(G.ab)$



گراف $G-ab$ از C_3 و C_4 با یک یال مشترک تشکیل شده پس $\tau(G-ab)=(3)(4)-1=11$

در گراف $G.ab$ رأس a برشی است، در سمت راست آن دو درخت فراگیر و در سمت چپ آن 5 درخت فراگیر وجود دارد پس $\tau(G.ab)=2\times5=10$ به این ترتیب داریم:

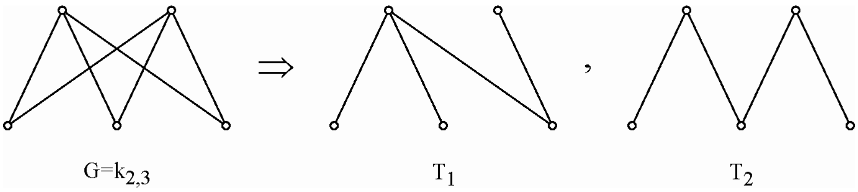
$\tau(G)=11+10=21$

۸۰- گزینه (۱) صحیح است.

تعداد کل درختان فراگیر را نمی‌خواهیم بلکه می‌خواهیم ببینیم چند درخت پوشای غیریکریخت

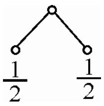
می‌توان یافت.

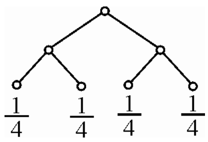
با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو حالت بیشتر وجود ندارد. اگر درخت فراگیر دارای یک رأس درجه 3 باشد، با T_1 یکریخت است و اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس درخت، کمتر از 3 باشد، با T_2 یکریخت می‌شود.

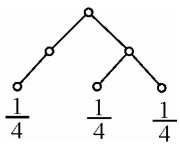


هر درخت فراگیر دیگر با یکی از این دو درخت، یکریخت می‌شود.

۸۱- گزینه (۱) صحیح است.

ریشه‌ی درخت را در سطح صفر در نظر می‌گیریم. اگر این درخت دقیقاً دارای 2 برگ در عمق یک باشد:  آنگاه $\sum_{x \text{ برگ}} W(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

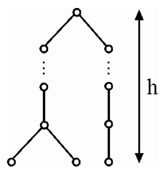
اگر دقیقاً 4 برگ در عمق 2 داشته باشد:  آنگاه بازهم مجموع $W(x)$ برای برگ‌ها برابر $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ است.

اما اگر درخت کامل نباشد و مثلاً 3 برگ در عمق 2 داشته باشد،  آنگاه این مجموع کمتر از یک می‌شود: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$.

نتیجه: برای همه‌ی درختان دودویی داریم $\sum_{x \text{ برگ}} W(x) \le 1$ و تساوی $\sum_{x \text{ برگ}} W(x) = 1$ فقط برای درختان دودویی کامل رخ می‌دهد.

۸۲- گزینه صحیح وجود ندارد.

با داشتن تعداد برگ‌های یک درخت دودویی نمی‌توان حداکثر ارتفاع درخت را تعیین کرد. برای مثال اگر تعداد برگ‌ها $\ell = 3$ باشد می‌توان درخت دودویی با ارتفاع دلخواه $h \ge 2$ را به این صورت در نظر گرفت:



پس گزینه‌ها نادرست هستند.
توضیح: اگر به جای (حداکثر) از واژه‌ی (حداقل) استفاده کنیم، گزینه‌ی (۱) صحیح خواهد بود.
حداقل ارتفاع یک درخت دودویی که ℓ برگ دارد برابر با $\lceil \log_2 \ell \rceil$ است.

$$h \geq \left\lceil \log_2^{150} \right\rceil = 8$$

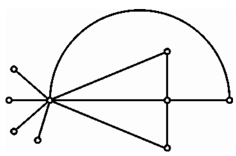
($\log_2 128 = 7$ است پس $\log_2 150$ عددی اعشاری بین 7 تا 8 است)

۸۳- گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به دنباله‌ی درجات این گراف، متوجه می‌شویم که زیر گرافی یکریخت با $K_{3,3}$ یا K_5 در آن وجود ندارد. علت این امر آن است که برای وجود $K_{3,3}$ به حداقل 6 رأس با درجه‌ی حداقل 3 نیاز داریم و برای وجود K_5 به حداقل 5 رأس با درجه‌ی حداقل 4 نیاز داریم.
حالا که در گراف G زیر گراف‌های $K_{3,3}$ و K_5 وجود ندارند پس G گرافی مسطح (مسطح‌شدنی) است.

پاسخ تکمیلی:

برای رد کردن سایر گزینه‌ها بهترین کار آن است که گراف G را رسم کنیم. یک رأس درجه 8 داریم که به همه رئوس دیگر متصل است. 4 رأس درجه یک داریم که برگ‌ها هستند. سایر رئوس هم مطابق شکل هستند. این گراف شامل مثلث (دور به طول فرد) است پس دو بخشی نیست.



رأس درجه‌ی 8 برشی است زیرا با حذف آن، گراف ناهمبند می‌شود. G دور به طول 5 ندارد.

۸۴- گزینه (۱) صحیح است.

یک رأس v_0 در وسط داریم و 20 رأس دیگر در اطراف آن قرار دارند. 20 یال با وزن 3 داریم که فقط یکی از آن‌ها باید انتخاب شود. (20 حالت).
10 یال با وزن 2 داریم که فقط یکی از آن‌ها باید حذف شود (10 حالت).
یال‌های با وزن یک همه باید در درخت فراگیر حضور داشته باشند و حضور آن‌ها اجباری است.
جواب $= 20 \times 10 = 200$

۸۵- گزینه (۲) صحیح است.

G همان گراف 5- مکعب است.
تعداد کل رئوس G برابر با $2^5 = 32$ است. هرکدام از رئوس با 5 رأس دیگر مجاور است. برای

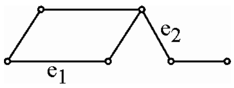
مثال رأس 11111 با رئوس 01111 و 10111 و 11011 و 11101 و 11110 مجاور است. پس درجه‌ی هر رأس برابر با 5 است.

$$\text{تعداد یال‌ها} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{32}\deg(v_i) = \frac{1}{2}(32\times 5) = 80$$

توضیحات تکمیلی در مورد گراف‌های k- مکعب را از متن درس مطالعه کنید.

۸۶- گزینه (۴) صحیح است.

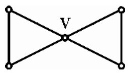
گزینه (۱) درست است. اگر یال $e=(a,b)$ را حذف کنیم و گراف ناهمبند نشود پس مسیر دیگری مانند P از a به b وجود دارد پس $P+e$ یک دور است. توجه شما را به شکل زیر جلب می‌کنیم.



با حذف e_1، گراف G ناهمبند نمی‌شود پس e_1 یک پل (یال برشی) نیست. علت این امر آن است که e_1 در یک دور شرکت دارد.

اما با حذف e_2 گراف G ناهمبند می‌شود. e_2 در هیچ دوری شرکت ندارد و به همین علت یک یال برشی است.

اگر e یک یال برشی باشد، رئوس دو سر آن هم رأس‌های برشی هستند. پس گزینه (۲) هم درست است.

البته گراف می‌تواند رأس برشی داشته باشد اما یال برشی نداشته باشد برای مثال در گراف  ، v رأس برشی است اما یال برشی نداریم. پس گزینه (۴) غلط است.

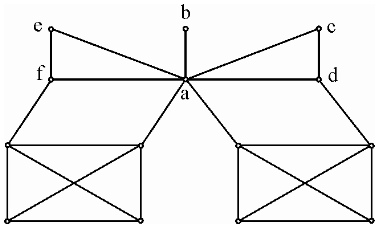
گزینه (۳) هم طبق توضیحات مربوط به گزینه (۱) درست است.

جمع‌بندی:

۱) e یال برشی (پل) است اگر و تنها اگر در هیچ دوری شرکت نداشته باشد.

۲) اگر یال برشی موجود باشد آنگاه رأس برشی هم وجود دارد. اما عکس این مطلب صحیح نیست.

۸۷- گزینه (۲) صحیح است.



تنها یالی که با رأس b در تماس است یال ab است پس انتخاب ab اجباری است. وقتی یال ab را انتخاب می‌کنیم همه‌ی یال‌های دیگر متصل به a و b را حذف می‌کنیم. حالا انتخاب cd و ef اجباری است.

پس تا اینجا متوجه شدیم که انتخاب یال های ef, cd, ab اجباری است. همه‌ی یال‌های دیگر مرتبط با این رئوس را حذف کنید.

دو گراف مجزای K_4 باقی می‌ماند. تعداد تطابق‌های کامل در گراف K_4 برابر با 3 است پس تعداد کل تطابق‌های کامل در گراف موردنظر $3 \times 3 = 9$ است.

یادآوری: گراف K_{2n+1} تطابق کامل ندارد، اما تعداد تطابق‌های کامل گراف K_{2n} برابر با $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$ است.

۸۸- گزینه (۲) صحیح است.

گراف G ناهمبند است پس حداقل دارای دو مولفه‌ی همبندی G_1 و G_2 است. بیشترین تعداد یال‌ها هنگامی به دست می‌آید که G_1 و G_2 دو گراف کامل باشند. پس کافیست به این حالت‌ها فکر کنیم:

K_1 و K_5 □ تعداد یال‌ها: $\frac{5 \times 4}{2} + 0 = 10$ $\qquad$ K_2 و K_4 □ تعداد یال‌ها: $\frac{4 \times 3}{2} + 1 = 7$

K_3 و K_3 □ تعداد یال‌ها: $3 + 3 = 6$

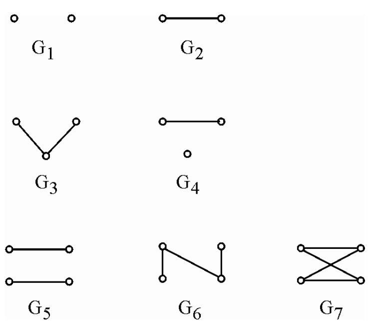
پس بیشترین تعداد یال‌ها هنگامی به دست می‌آید که یک گراف K_5 و یک رأس تنها داشته باشیم.

۸۹- گزینه (۲) صحیح است.

برای آن که G و $\overline{G}$ هر دو دوبخشی باشند باید کاری کنیم که هیچکدام از آن‌ها شامل دوری به طول فرد (مثلث، 5 ضلعی، ...) نباشند.

در گراف‌های با 5 رأس یا بیشتر، همواره G و $\overline{G}$ شامل دوری به طول فرد هستند این را می‌توانید با بررسی گراف‌های 5 رأسی متوجه شوید.

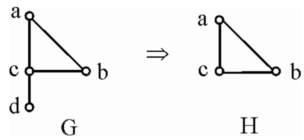
بنابراین فقط در بین گراف‌هایی که 2 ، 3 یا 4 رأسی هستند جستجو می‌کنیم.



این 7 گراف، گراف‌هایی هستند که خود آن‌ها و مکمل آن‌ها هر دو دوبخشی‌اند.

۹۰- گزینه (۳) صحیح است.

اگر G گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد آنگاه زیر گراف $H=(V',E')$ را القایی گوییم هرگاه $V'\subseteq V$ باشد و $E'=E\bigcap(V'\times V')$. به بیان ساده‌تر E' شامل همه‌ی یال‌هایی از G باشد که دو سر آن‌ها عضو V' است.
گزینه‌های (۱) و (۲) به سرعت رد می‌شوند زیرا H ممکن است با G برابر باشد. برای سایر گزینه‌ها گراف G را در نظر بگیرید. فرض کنیم H زیر گراف القایی شامل رئوس a , b و c باشد.



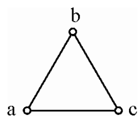
بیشترین و کمترین درجه‌ی رئوس G عبارتند از $\Delta_G=3$ و $\delta_G=1$
بیشترین و کمترین درجه رئوس H عبارتند از $\Delta_H=2$ و $\delta_H=2$
بنابراین گزینه (۴) نادرست است و گزینه (۳) جواب است.

۹۱- گزینه (۴) صحیح است.

فرض کنیم n تعداد رئوس و e تعداد یال‌ها باشد.
اگر $e\le n-1$ باشد آنگاه گراف G ممکن است یک درخت یا جنگل باشد و هیچ دوری نداشته باشد.
اگر $e>n-1$ باشد آنگاه حداقل به اندازه $e-(n-1)$ دور خواهد داشت. برای مثال در حالت $e=n$ حداقل یک دور و در حالت $e=n+1$ حداقل 2 دور در G وجود دارد.
در این سوال $n=20$ و $e=30$ است پس حداقل تعداد دورها برابر است با:
$e-(n-1)=30-19=11$

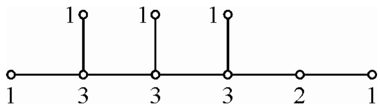
۹۲- گزینه (۱) صحیح است.

فرض کنیم b,a و c سه تا از رئوس این گراف باشند. اگر هر جفت از این رئوس به هم متصل باشند، باید $a-b$ ، $a-c$ و $b-c$ نسبت به 34 اول باشند. اما این امکان ندارد زیرا حداقل یکی از این این تفاضل‌ها، عددی زوج خواهد بود. برای مثال اگر a زوج و b و c فرد باشند، $b-c$ عددی زوج می‌شود پس $b-c$ و 34 هر دو بر 2 بخش‌پذیر می‌شوند. در سایر حالات هم همواره حداقل یک تفاضل زوج رخ می‌دهد.
با این توضیحات می‌بینیم که هیچ مثلثی در گراف G وجود ندارد.

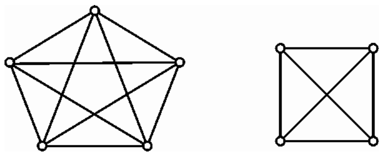


۹۳- گزینه (۳) صحیح است.

در مورد گزینه (۱)، می‌توان به سادگی گراف همبند G با دنباله‌ی درجات داده شده را رسم کرد. این گراف 5 رأس درجه یک (برگ) دارد. 3 رأس درجه 3 و یک رأس درجه 2 هم رئوس میانی را تشکیل می‌دهند. پس گزینه (۱) نادرست است.

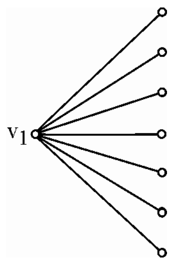


در مورد گزینه (۲)، گرافی با 5 رأس که همگی درجه 4 باشند و گرافی با 4 رأس که همگی درجه 3 باشند وجود دارد. این گراف‌ها همان k_5 و k_4 هستند. گراف G از دو مولفه‌ی k_5 و k_4 تشکیل می‌شود. پس گرافی ناهمبند با این دنباله‌ی درجات وجود دارد. گزینه (۲) نادرست است.



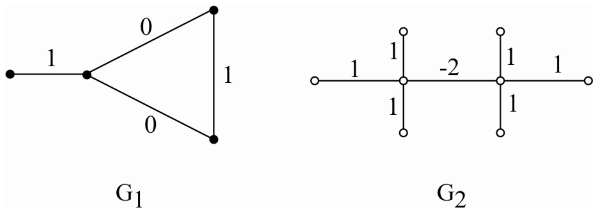
در مورد گزینه (۴)، از آنجا که تعداد درجات فرد، فرد است پس گرافی با این دنباله درجات وجود ندارد. گزینه (۴) نادرست است.

گزینه (۳) درست است. این گراف دارای 8 رأس است. درجه‌ی یکی از آن‌ها 7 است پس رأسی مانند v_1 داریم که به همه رئوس دیگر متصل است. بنابراین اگر این گراف بخواهد دو بخشی باشد، v_1 در یک بخش و سایر رئوس در بخش دیگر قرار می‌گیرند. در نتیجه سایر رئوس نباید با یکدیگر همسایه باشند. یعنی درجه‌ی سایر رئوس باید یک باشد. در حالی که اینطور نیست.
پس گرافی دو بخشی با این دنباله درجات وجود ندارد.



۹۴- گزینه (۲) صحیح است.

روش اول: می‌توانیم با رسم چند گراف و وزن‌دار کردن یال‌ها با رعایت شرط داده شده، گزینه‌های غلط را شناسایی کنیم. گراف‌های G_1 و G_2 دو نمونه از این گراف‌ها هستند:



گراف G_1 دور به طول فرد دارد پس دوبخشی نیست. تعداد رئوس این گراف‌ها زوج است، گراف G_2 تطابق کامل ندارد. بنابراین فقط با توجه به این دو مثال، گزینه‌های (۱) ، (۳) و (۴) رد می‌شوند. فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

روش دوم: فرض کنیم G گرافی با رئوس $v_1, v_2, ..., v_n$ باشد. وزن یال‌های آن را با $e_1, e_2, ..., e_k$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم w_i مجموع وزن یال‌های مرتبط با v_i باشد. طبق صورت سوال داریم $w_i = 1$ $(1 \le i \le n)$ در نتیجه:

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = n$$

از طرفی هرکدام از یال‌ها دو بار در این مجموع محاسبه می‌شوند زیرا هر یال دارای یک ابتدا و یک انتها است. در نتیجه:

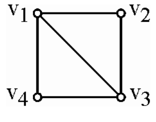
$2e_1 + 2e_2 + ... + 2e_k = n \Rightarrow 2(e_1 + ... + e_k) = n \Rightarrow$ n زوج است.

۹۵- گزینه (۴) صحیح است.

هرکدام از درایه‌های 1 در ماتریس مجاورت نشان‌دهنده‌ی یک یال جهت‌دار است. گزینه‌ی (۱) به سادگی رد می‌شوند زیرا ممکن است n فرد باشد و G در این حالت تطابق کامل نخواهد داشت. (هر تطابق کامل باید شامل $\frac{n}{2}$ یال مجزا باشد.)

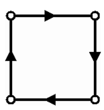
گزینه‌های (۲) و (۳) را هم می‌توان به سرعت رد کرد زیرا ممکن است گراف G اصلاً شامل هیچ دوری نباشد.

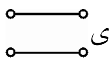
پس گزینه (۴) تنها گزینه منطقی است. با این حال بهتر است با یک مثال موضوع را روشن‌تر کنیم. فرض کنیم G گراف زیر باشد:



$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

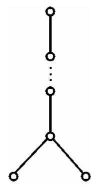
اکنون 4 درایه‌ی 1 انتخاب می‌کنیم که هیچکدام سطر و ستون مشترکی نداشته باشند. منظور ما از ij درایه‌ی a_{ij} است.

اگر 12 , 23 , 34 , 41 را انتخاب کنیم دور  ایجاد می‌شود.

اگر 12 , 21 , 34 , 43 را انتخاب کنیم دو مسیر دورأسی مجزای  ایجاد می‌شود. پس گزینه (۴) درست است.

۹۶- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

اگر T درختی دودوئی با k برگ باشد، تعداد رأس‌های درخت حداقل $2k-1$ است اما حداکثر ندارد. برای مثال در شکل زیر درختی دودوئی با $k=2$ برگ داریم که تعداد رئوس آن را می‌توان تا هر اندازه دلخواه افزایش داد زیرا ارتفاع این درخت به دلخواه قابل افزایش است.



توجه: منظور طراح سوال آن بوده که تعداد رأس‌های درخت، حداقل چندتاست. اگر T درختی با k برگ باشد، حداقل تعداد رأس‌ها هنگامی به دست می‌آید که T درخت دودوئی کامل باشد. در این صورت k برگ و $k-1$ رأس میانی داریم پس تعداد کل رئوس $2k-1$ خواهد بود.

۹۷- گزینه (۲) صحیح است.

درخت‌های DFS با شروع از h این‌ها هستند:

habcdefg , habcdgfe
hcbadefg , hcbadgfe
hcdefgba , hcdgfeba

۹۸- گزینه (۳) صحیح است.

تساوی $|a-a'|+|b-b'|+|c-c'|=1$ نشان‌دهنده‌ی آن است که رئوس (a,b,c) و (a',b',c') فقط در یک مولفه آن هم به اندازه یک واحد باهم اختلاف دارند. اگر اعداد 1 و 2 یکی از مولفه‌ها باشند، هم می‌توان آن‌ها را یک واحد افزایش داد و هم می‌توان یک واحد کاهش داد. اما ارقام 0 و 3 را فقط از یک طرف می‌توان افزایش یا کاهش داد. به همین دلیل درجه‌ی رئوس گراف G به این ترتیب تعیین می‌شوند:

8 رأس داریم که در آن‌ها فقط از ارقام 1 و 2 استفاده شده است. درجه‌ی این رئوس برابر با 6 است.

24 رأس داریم که فقط یک مولفه‌ی آن‌ها 0 یا 3 دو مولفه‌ی دیگر 1 یا 2 هستند، درجه‌ی این رئوس برابر با 5 است.

24 رأس داریم که دو تا از مولفه‌های آن‌ها 0 یا 3 و یک مولفه‌ی دیگر 1 یا 2 است. درجه‌ی این رئوس برابر با 4 است.

8 رأس داریم که همه مولفه‌های آن‌ها 0 یا 3 هستند. درجه‌ی این رئوس برابر با 3 است.

$$e=\frac{1}{2}\sum \deg(v_i)=\frac{1}{2}(6\times 8+5\times 24+4\times 24+3\times 8)=144$$

۹۹- گزینه (۱) صحیح است.

اگر i و j هر دو زوج باشند آنگاه $a_{ij}=0$ است. اگر i و j هر دو فرد باشند باز هم $a_{ij}=0$ است. اما اگر یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد آنگاه $i-j$ عددی فرد است و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر 2 برابر با یک است، در این حالت $a_{ij}=1$ خواهد بود.

با این توضیحات می‌بینیم که رئوس گراف G به دو بخش X و Y قابل تفکیک هستند. X مجموعه‌ی رئوس زوج و Y مجموعه‌ی رئوس فرد است و هر یال از G حتماً عضوی از X را به عضوی از Y متصل می‌کند. پس G گرافی دو بخشی است. در ضمن $|X|=696$ و $|Y|=696$ بنابراین G گراف دو بخشی $K_{696,696}$ است. این گراف منظم است زیرا درجه‌ی همه‌ی رئوس آن 696 است. G به وضوح همبند است. اما G مسطح نیست زیرا گراف $K_{n,m}$ که در آن $n\geq 3$ و $m\geq 3$، مسطح نیست.

۱۰۰- گزینه (۱) صحیح است.

استفاده از واژه‌ی (کوچکترین) در اینجا درست نیست و منظور طراح سوال، سبک‌ترین یا کم‌هزینه‌ترین درخت فراگیر بوده است.

با حذف یال‌های سنگین به گونه‌ای که گراف ناهمبند نشود، می‌توان به یک درخت فراگیر کم‌هزینه رسید. تمام یال‌های به وزن 3 باید حذف شوند. در این مورد انتخابی وجود ندارد و حذف آن‌ها الزامی است. در مرحله‌ی بعد، هیچکدام از یال‌های به وزن 2 را نمی‌توان حذف کرد زیرا حذف آن‌ها باعث ناهمبندی می‌شود. پس در این مورد هم انتخابی وجود ندارد.

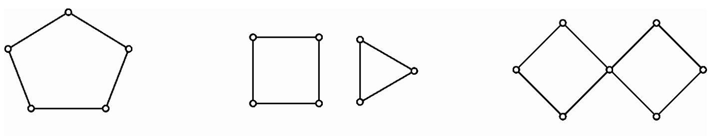
از بین 6 یال به وزن 1، یکی را باید حذف کنیم. پس 6 انتخاب مختلف وجود دارد.

۱۰۱- گزینه (۴) صحیح است.

درجه‌ی همه‌ی رئوس در G زوج است، بنابراین اگر گراف G همبند باشد، یک مدار اویلری دارد و اگر هم ناهمبند باشد، هرکدام از مولفه‌های همبندی آن، دارای مدار اویلری هستند. پس می‌توانیم مجموعه‌ی همه یال‌های G را به صورت یک دور یا اجتماع مجزای چند دور، افراز کنیم. پس گزینه (۴) صحیح است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

به چند گراف که درجه‌ی همه رئوس آن‌ها زوج است توجه کنید:

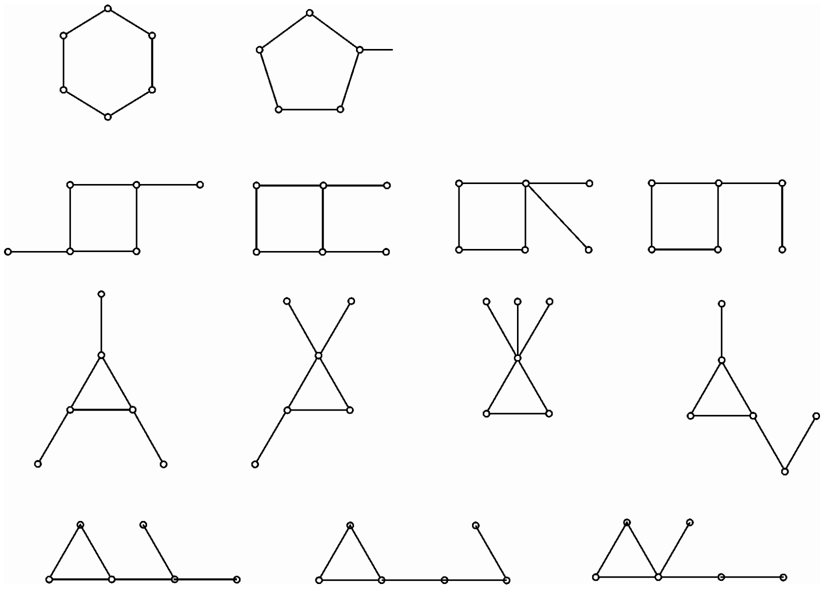


G_1 G_2 G_3

گزینه (۱) درست نیست زیرا دورهای به طول فرد مانند G_1 دو بخشی نیستند.
گزینه‌های (۲) و (۳) درست نیستند زیرا گراف موردنظر ممکن است مانند G_2 ناهمبند باشد. اما در مورد همه‌ی این گراف‌ها، گزینه (۴) صحیح است.

۱۰۲- گزینه (۲) صحیح است.

مرتبه و اندازه‌ی G به معنای تعداد رئوس و تعداد یال‌های آن هستند. گراف G همبند است و در آن $n = e = 6$ است پس دقیقاً شامل یک دور خواهد بود. می‌توانیم انواع حالات گراف G را با توجه به آن که دوری به طول 3 یا 4 یا 5 یا 6 در آن وجود داشته باشد، طبقه‌بندی کنیم:



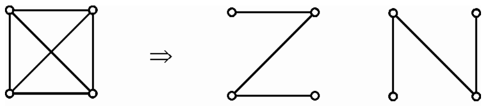
هر گراف همبند دیگر که 6 رأس و 6 یال داشته باشد، با یکی از این گراف‌ها یکریخت است.

۱۰۳-گزینه (۳) صحیح است.

در گراف k_n، بیشترین تعداد درختان فراگیر با یال‌های مجزا هنگامی به دست می‌آید که درخت‌های فراگیر انتخاب شده، همگی مسیرهای ساده به طول $n-1$ باشند.

تعداد کل یال‌های گراف k_n برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ است و هر مسیر ساده به طول $n-1$ دارای $n-1$ یال خواهد بود بنابراین تعداد مسیرهای ساده به طول n با یال‌های مجزا حداکثر به اندازه‌ی $\frac{n}{2}$ خواهد بود. ممکن است n فرد باشد که در این صورت $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ را در نظر می‌گیریم.

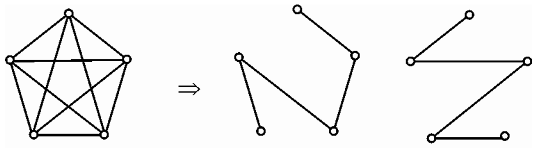
برای مثال در گراف k_4 می‌توان 2 درخت فراگیر با یال‌های مجزا پیدا کرد:



T_1 T_2

، $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{4}{2} = 2$

در گراف k_5 هم می‌توان 2 درخت فراگیر با یال‌های مجزا پیدا کرد:



T_1 T_2

، $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$

برای گراف k_{21} نیز تعداد جواب‌ها $\left\lfloor \frac{21}{2} \right\rfloor = 10$ است.

۱۰۴- گزینه (۱) صحیح است.

اگر گراف G دارای 5 رأس یا بیشتر باشد آنگاه G یا $\overline{G}$ (مکمل G) دارای دوری به طول فرد (مثلث یا 5 ضلعی) خواهند بود. به همین دلیل برای گراف‌های با 5 رأس یا بیشتر، G و $\overline{G}$ نمی‌توانند هر دو باهم دو بخشی باشند. این مطلب را می‌توانید با رسم گرافی دلخواهی با 5 رأس متوجه شوید.

یال‌های G را هرطور که انتخاب کنید می‌بینید که G یا $\overline{G}$ دارای دوری به طول فرد خواهند شد. بنابراین اگر G و $\overline{G}$ هردو دوبخشی باشند، تعداد رئوس G حداکثر 4 تا است.

توجه: موضوع سوال علوم کامپیوتر سال ۹۲ در این سوال تکرار شده است. با توجه به پاسخی که در آنجا داده‌ایم. سایر گزینه‌های این سوال رد می‌شوند.

۱۰۵- گزینه (۴) صحیح است.

گزینه (۱) اصلاً ترسیمی نیست زیرا تعداد فردها، فرد است.

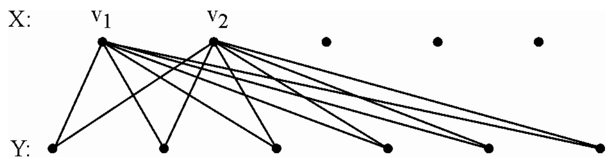
گزینه (۳) هم به سرعت رد می‌شود زیرا گراف دوبخشی که دنباله درجات آن فقط از 4 و 5 تشکیل شده است باید $k_{4,5}$ باشد یعنی 5 رأس درجه 4 و 4 رأس درجه‌ی 5 داشته باشد که در گزینه (۳) چنین نیست.

برای بررسی گزینه (۲) از برهان خلف استفاده کنیم. فرض کنیم این گراف از دو بخش X و Y تشکیل شده باشد. فرض کنیم $v_1 \in X$ باشد. $\deg v_1 = 6$ است پس Y باید حداقل 6 عضو داشته باشد.

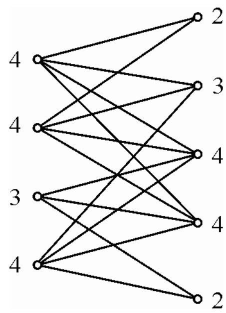
اگر $v_2 \in Y$ باشد، از آنجا که $\deg v_2 = 6$ است، X هم باید حداقل 6 عضو داشته باشد که این غیرممکن است زیرا تعداد کل رئوس، 11 تا است. در نتیجه v_2 هم باید عضوی از بخش X

باشد. تا اینجا متوجه شدیم که بخش X دارای دو رأس درجه‌ی 6 است که به همه‌ی رئوس بخش Y متصل هستند.

در ادامه می‌بینیم که در بین رئوس مخالف v_1 و v_2، باید 6 رأس درجه 4 داشته باشیم که بـه هـر شکلی آن‌ها را انتخاب کنیم، یک رأس با درجه 3 ایجاد می‌شود که در دنباله‌ی درجات گزینـه (۲) وجود ندارد. پس گزینه (۲) نمی‌تواند دوبخشی باشد.



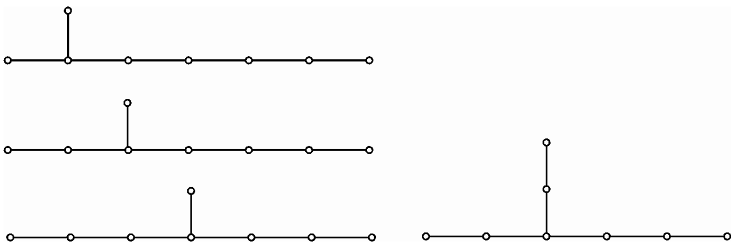
گزینه (۴) می‌تواند دنباله‌ی درجات یک گراف دوبخشی به شکل زیر باشد:



۱۰۶- گزینه (۲) صحیح است.

هرگاه رئوس میانی یک درخت دارای درجات $d_1, d_2, ..., d_k$ باشند، تعداد برگ‌های آن درخـت $\ell = 2 + \sum_{i=1}^{k}(d_i - 2)$ است. بنابراین رئوس درجه 2، هیچ برگی به درخت اضافه نمی‌کننـد و رأس درجه 3، یک برگ به درخت اضافه می‌کنـد. در ایـن مثـال داریـم: $\ell = 2 + (3-2) = 3$ پـس ایـن درخت 3 برگ دارد.

حالا ببینیم درختی با یک رأس درجه 3، 4 رأسی درجـه 2 و 3 بـرگ چنـد فـرم مختلـف خواهـد داشت:



هر درخت دیگر با این دنباله درجات، با یکی از 4 درخت فوق یکریخت است.

۱۰۷- گزینه (۴) صحیح است.

اثبات یکریخت بودن دو گراف ساده نیست اما تشخیص یکریخت نبودن ساده است. کافیست دو گراف در یکی از ویژگی‌ها مانند تعداد رئوس، تعداد یال‌ها، دنباله درجات، عدد رنگی، تعداد مثلث‌ها، تعداد دورهای به طول k، ... تفاوت داشته باشند تا مطمئن شویم که یکریخت نیستند.

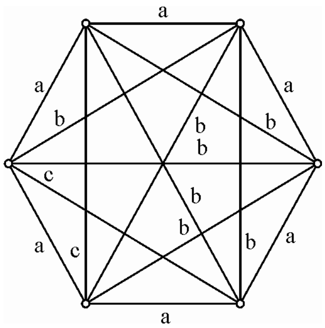
گراف داده شده در صورت سوال دارای مثلث (دور به طول 3) است اما گزینه (۴) هیچ دوری به طول 3 ندارد. بنابراین با آن یکریخت نیست.

روش دوم: عدد رنگی گراف داده شده، 3 است. آن را نمی‌توان با 2 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. اما عدد رنگی گراف گزینه (۴) برابر با 2 است.

۱۰۸- گزینه (۲) صحیح است.

گراف k_6 را به صورت یک 6 ضلعی منتظم با همه‌ی اضلاع و قطرهایش در نظر بگیرید. ابتدا همه‌ی اضلاع (محیط) را با رنگ a رنگ‌آمیزی کنیم.

حالا فرض کنید همه‌ی قطرها را به رنگ b رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. برخی از قطرها باهم تشکیل یک مثلث می‌دهند که در این صورت یکی از آن قطرها را به جای b، به رنگ c رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به این ترتیب می‌بینید که موفق شدیم با 3 رنگ به شرایط موردنظر برسیم.



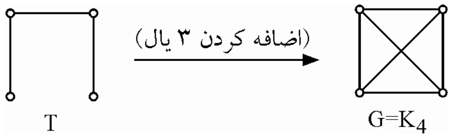
۱۰۹- گزینه (۲) صحیح است.

گزینه (۲) به وضوح نادرست است زیرا با اضافه کردن 3 یال به یک درخت نمی‌توان گراف‌های k_5 یا $k_{3,3}$ را ایجاد کرد. گراف k_5 دارای 5 رأس و $10=\frac{5\times4}{2}$ یال است، گراف $k_{3,3}$ دارای 6 رأس و $9=3\times3$ یال است، در حالی که یک درخت دارای n رأس و $n-1$ یال است و اگر 3 یال هم به آن اضافه کنیم گرافی با n رأس و $n+2$ یال به دست می‌آید.

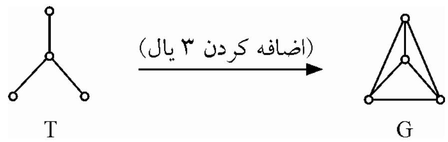
پس گراف ایجاد شده، قطعاً شامل k_5 یا $k_{3,3}$ نیست پس مسطح خواهد بود.

در مورد گزینه‌های (۱) و (۳)، حداکثر تعداد دورها و حداکثر تعداد مسیرها بین دو رأس، هنگامی

به دست می‌آید که با اضافه کردن 3 یال به یک درخت، به گراف کامل برسیم. اگر بخواهیم گرافی با n رأس و $n+2$ یال یک گراف کامل باشد باید $n=4$ باشد.
گراف k_4 دارای 4 رأس و 6 یال است.



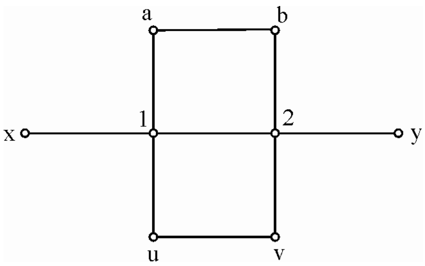
تعداد دورها در گراف k_4 برابر با 6 است. (3 دور به طول 3 و 3 دور به طول 4) و بین هر 2 رأس آن 4 مسیر وجود دارد. پس گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند.
گزینه (۴) به وضوح برقرار است برای مثال این حالت را در نظر بگیرید:



در درخت T طول بلندترین مسیر، برابر با 2 است اما در گراف G مسیرهای به طول 3 هم وجود دارد.

۱۱۰- گزینه (۱) صحیح است.

درایه‌ی $(1,2)$ در ماتریس A^3 برابر است با تعداد همه‌ی راه‌ها (گشت‌ها) که با 3 گام از رأس 1 به رأس 2 می‌رسند:



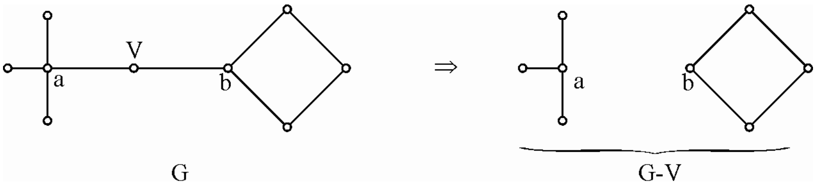
1x12 , 1a12 , 1u12
12b2 , 12v2 , 12y2
1ab2 , 1uv2 , 1212

پس 9 راه مختلف برای رسیدن از 1 به 2 با سه گام وجود دارد.

۱۱۱- گزینه (۳) صحیح است.

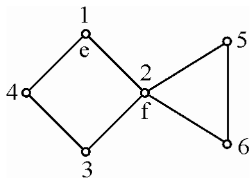
حکم (الف) درست است. اگر V رأسی غیربرشی باشد آنگاه $G-V$ فقط یک مولفه‌ی همبند دارد و V حداقل با یکی از رئوس آن همسایه بوده است. اگر V رأسی برشی مانند شکل زیر باشد

آنگاه $G-V$ دارای دو یا چند مولفه‌ی همبند است که V با رأسی از هرکدام از آن‌ها همسایه بوده است:



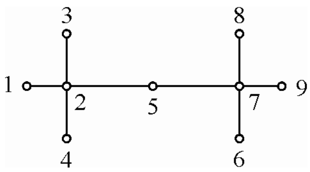
حکم (ب) نادرست است. برای مثال فرض کنید G از دو دور ساده تشکیل شده باشد که با رأس برشی به هم متصل شده‌اند.

یال $(1,2)$ را e و یال $(2,3)$ را f بنامیم. هیچ مدار اویلری نمی‌توان یافت که در آن این دو یال پشت سر هم قرار داشته باشند.



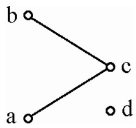
یکی از مدارهای اویلری این گراف 12652341 است.

حکم (پ) برقرار است. هر گراف دو بخشی همبند، شامل یک درخت فراگیر است و می‌دانیم که اگر قرار باشد رئوس درخت را با دو رنگ از هم تفکیک کنیم، بخش‌های X و Y به شکل منحصر به فردی مشخص شوند. مثلاً در رنگ‌آمیزی درخت



واضح است که رئوس آن به دو بخش به صورت $\{1,3,4,5,8,6,9\}$ و $\{2,7\}$ افراز می‌شوند.

اما در مورد گراف‌های دو بخشی ناهمبند، می‌توان به چند حالت این افراز را انجام داد. مثلاً گراف G را در نظر بگیرید:

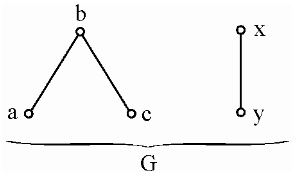


این گراف دو بخشی است زیرا می‌توان رئوس آن را فقط با 2 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. البته دو راه برای افراز رئوس به 2 رنگ مختلف وجود دارد:

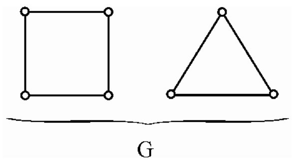
$X_1=\{a,b\} \quad , Y_1=\{c,d\}$

$X_2=\{a,b,d\} , Y_2=\{c\}$

حکم (ت) واضح است. اگر G ناهمبند باشد آنگاه حداقل دارای دو مولفه‌ی همبندی مطابق شکل است.
اگر فرض کنیم $A=\{x,y\}$ و $B=\{a,b,c\}$ آنگاه A و B افرازی از رئوس G هستند و هیچ یالی از A به B وجود ندارد.



حکم (ث) نادرست است، ممکن است گراف G همبند نباشد. مثلاً در گراف زیر همه رئوس درجه‌ی زوج دارند اما این گراف اصلاً مدار اویلری ندارد زیرا همبند نیست.

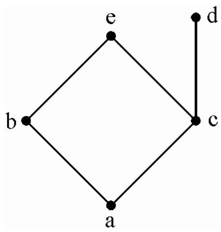


۱۱۲- گزینه (۱) صحیح است.
تعداد اتومورفیزم‌ها (خودریختی‌ها) برای $K_{n,n}$ برابر با $2n!n!$ و برای $K_{n,m}$ (که $n \neq m$) برابر با $n!m!$ است.
پس برای $K_{3,3}$ داریم $2\times 3!\times 3! = 72$ و برای $K_{3,5}$ داریم $3!\times 5! = 720$.
توضیحات تکمیلی در مورد تعداد خودریختی‌ها را از متن درس مطالعه کنید.

۱۱۳- گزینه (۳) صحیح است.
بررسی گزینه (۱):
اگر $|A|=n$ و R یک رابطه‌ی ترتیب کلی باشد آنگاه برای هر $a\in A$ داریم $a\leq a$ پس n زوج مرتب به صورت (a,a) داریم که هرکدام یک یال (طوق) در گراف G ایجاد می‌کنند. از طرفی برای هر $a\neq b$ یکی از روابط $a<b$ یا $b<a$ برقرار هستند پس به ازای هر جفت از عناصر A دقیقاً یک یال جهت‌دار در G خواهیم داشت.

$$\text{تعداد یال‌ها} = \binom{n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$$

بررسی گزینه (۲):
اگر B یک زنجیر در A باشد آنگاه B مجموعه مرتب کلی خواهد بود. برای مثال فرض کنیم A نمودار هاسه‌ی رسم شده باشد. $B=\{a,c,d\}$ زیرمجموعه‌ای از A است که مرتب کلی است.



پس گزینه (۲) صحیح است.

بررسی گزینه (۳):

هرگاه $n = p^m q^n$ باشد، تعداد یال‌ها در نمودار هاسه‌ی D_n برابر با $m+n+2mn$ است. پس نمودار هاسه‌ی $n = p^3q^2$ دارای 17 یال است.

پس گزینه (۳) نادرست است.

بررسی گزینه (۴):

از آنجا که روابط R_1 و R_2 ترتیب جزیی هستند و ویژگی‌های بازتابی، پادتقارنی، و تعدی را دارند، رابطه‌ی R هم روی مجموعه‌ی $A \times B$ این ۳ ویژگی را خواهد داشت. برای مثال فرض کنیم (a,b) عضو دلخواهی از $A \times B$ باشد. پس $a \in A$ و $b \in B$ است.

روابط R_1 و R_2 بازتابی هستند پس aR_1a و bR_2b در نتیجه:

$$(a,b)R(a,b)$$

یعنی رابطه‌ی R بازتابی است. سایر ویژگی‌ها هم به همین روش ثابت می‌شوند.

۱۱۴- گزینه (۴) صحیح است.

گزینه (۱) نادرست است زیرا به شرط همبند بودن یا شرط فاقد دور بودن اشاره نکرده است. فرم صحیح این حکم به این شکل است:

- اگر G ساده و همبند و $|V| = |E| + 1$ آنگاه G یک درخت است.
- اگر G ساده، فاقد دور و $|V| = |E| + 1$ آنگاه G یک درخت است.

گزینه (۲) نادرست است، حداکثر تعداد رئوس میانی یک درخت 4 تایی به ارتفاع 8 به این صورت به دست می‌آید:

$$1 + 4 + 4^2 + ... + 4^7 = \frac{1-4^8}{1-4} = 21845$$

تعداد برگ‌ها حداکثر 4^8 است. یادآوری می‌کنیم که:

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \qquad (x \neq 1)$$

گزینه (۳) نادرست است. تعداد کل مسیرها در درختی با n رأس برابر با $\binom{n}{2}$ است.

$$\binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45$$

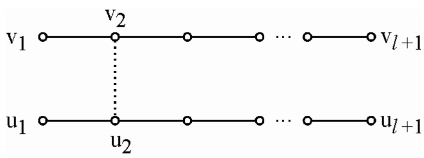
گزینه (۴) درست است.

این درخت دارای 34 رأس میانی است و چون درخت کامل سه‌تایی است، از هر رأس میانی دقیقاً 3 یال خارج می‌شود. پس تعداد یال‌ها $3\times 34 = 102$ است.

۱۱۵- گزینه (۲) صحیح است.

گزاره‌ی (الف) درست است. اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس حداقل $\delta \geq 2$ باشد، نتیجه می‌گیریم که این گراف دارای برگ (رأس درجه یک) نیست پس نمی‌تواند درخت یا جنگل باشد در نتیجه حتماً دارای دور است. در واقع چنین گرافی حتماً شامل دوری به طول حداقل $\delta+1$ خواهد بود. طول این دور بزرگتر مساوی $\delta+1$ است پس می‌توان گفت بزرگتر مساوی δ هم هست.

گزاره‌ی (ب) هم صحیح است. برای اثبات آن از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم دو مسیر به طول ℓ در یک درخت وجود داشته باشد که بزرگترین مسیرهای ممکن باشند ولی رأس مشترکی نداشته باشند. از آنجا که درخت همبند است حداقل یک رأس از مسیر اول به یک رأس از مسیر دوم متصل است. در این صورت می‌توان مسیری با طول بیشتر از ℓ در این درخت پیدا کرد که تناقض است. برای مثال اگر مطابق شکل v_2 به u_2 متصل باشد مسیری که از v_1 تا $u_{\ell+1}$ ادامه دارد، مسیری به طول $\ell+1$ است.



۱۱۶- گزینه (۴) صحیح است.

12 ترتیب توپولوژیک داریم که به شکل (AB)(CDE)(F) هستند فقط در داخل هر پرانتز، جایگشت‌های مختلف را لحاظ می‌کنیم: $2!\times 3!\times 1! = 12$

از طرفی B و C هیچ رابطه‌ی ترتیبی باهم ندارند پس می‌توان دو ترتیب توپولوژیک هم به این شکل پیدا کرد: ACBDEF , ACBEDF

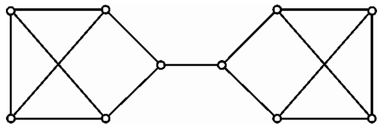
همچنین A و E هیچ رابطه‌ی ترتیبی باهم ندارند پس می‌توان دو ترتیب توپولوژیک دیگر به این شکل پیدا کرد: BEACDF , BEADCF

در مجموع 16 ترتیب توپولوژیک می‌توان نوشت.

علت مطرح کردن این سؤال در فصل گراف‌ها آن است که مسئله مشابه می‌تواند برای گراف‌ها با اولویت رئوس مطرح شود.

۱۱۷- گزینه (۴) صحیح است.
با توجه به شرط داده شده متوجه می‌شوید که ناچارید برای هر رأس از یک رنگ متفاوت استفاده کنید. بنابراین به 10 رنگ مختلف نیاز خواهیم داشت. (برای درک بهتر این موضوع سعی کنید فقط از 9 رنگ برای رنگ‌آمیزی استفاده کنید، می‌بینید که شرط موردنظر، در یکی از رئوس نقض می‌شود).

۱۱۸- گزینه (۱) صحیح است.
گرافی که 5 مولفه داشته باشد همه مولفه‌هایش درخت باشند یک جنگل است.
در جنگلی با 5 مولفه داریم $e = n - 5$ پس به ازای $n = 100$ باید $e = 95$ باشد. بنابراین گزینه (۲) نادرست است.
گزینه (۳) با یک مثال نقض رد می‌شود. مطابق شکل می‌توانیم گرافی 3- منتظم رسم کنیم یال برشی داشته باشد.



گزینه (۴) هم به وضوح غلط است. اگر یک یال از درخت را حذف کنیم، آن درخت به دو مولفه‌ی همبند تبدیل خواهد شد. در واقع برای یک درخت داریم $e = n - 1$ پس اگر یک یال را حذف کنیم خواهیم داشت $e = n - 2$ که این رابطه مربوط به یک جنگل با 2 مولفه‌ی همبند است.

۱۱۹- گزینه (۳) صحیح است.
اگر G گرافی m منتظم با n رأس باشد آنگاه مکمل آن یعنی $\overline{G}$ گرافی $n-m-1$ منتظم با n رأس است. علت این امر آن است که همیشه $\deg_G^v + \deg_{\overline{G}}^v = n-1$ است.
پس تعداد گراف‌های 6 منتظم با 9 رأس برابر است با تعداد گراف‌های 2- منتظم با 9 رأس. هر گراف 2 منتظم از یک یا چند دور ساده تشکیل می‌شود. پس همه گراف‌های 2 منتظم با 9 رأس این‌ها هستند:

$$C_9\ ,\ C_6 + C_3\ ,\ C_5 + C_4\ ,\ C_3 + C_3 + C_3$$

پس 4 گراف 2 منتظم با 9 رأس وجود دارد. در نتیجه 4 گراف 6 منتظم با 9 رأس وجود دارد.
گزینه (۲) غلط است زیرا به سادگی می‌توانیم یک گراف دو بخشی رسم کنیم که هر بخش آن شامل 5 رأس باشد و درجه‌ی همه‌ی رئوس، 4 باشد. رسم این گراف ساده است.
برای گزینه (۴) می‌توان مثال نقض پیدا کرد. کافیست گرافی مانند G در نظر بگیرید که از دو مولفه‌ی K_5 و K_5 تشکیل شده باشد.
اما گزینه (۳) درست است. اگر این گراف بخواهد ناهمبند باشد، از هر کدام از مولفه‌های همبند آن

یک رأس را در نظر بگیرید. درجه‌ی این رئوس برابر با 4 است پس در هر مولفه باید حداقل 5 رأس وجود داشته باشد اما این غیرممکن است زیرا 9 رأس بیشتر نداریم.

۱۲۰- گزینه (۳) صحیح است.

این گراف 7-منتظم است پس مجموع درجات ورودی و خروجی در هر رأس برابر با 7است.

a تعداد رئوس را نشان می‌دهد که 6 ورودی و 1 خروجی دارند.

b تعداد رئوسی را نشان می‌دهد که 3 ورودی و 4 خروجی دارند.

مجموع همه‌ی درجات ورودی $6a+3b$ و مجموع همه درجات خروجی $a+4b$ است در نتیجه:

$$6a+3b=a+4b \;\Rightarrow\; 5a=b \;\Rightarrow\; \frac{b}{a}=5$$

۱۲۱- گزینه (۴) صحیح است.

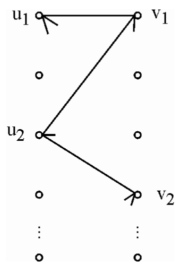
اگر درجه‌ی رئوس میان یک درخت، $d_1, d_2, ..., d_k$ باشند، تعداد برگ‌های آن درخت از رابطه‌ی $\ell = 2+\sum_{i=1}^{k}(d_i-2)$ به دست می‌آید. پس اگر یکی از رئوس میانی مثلاً $d_1=10$ باشد تعداد برگ‌ها حداقل $10=(2-10)+2$ خواهد بود. گزینه (۱) نادرست است.

گزینه (۲) نادرست است و همه‌ی درخت‌ها مسطح هستند. هرچند این مطلب واضح است اما برای اثبات آن می‌توان به این نکته اشاره کرد که درخت‌ها فاقد دور هستند پس زیرگرافی یکریخت با k_5 یا $k_{3,3}$ در درخت وجود ندارد پس هر درختی مسطح است.

هر درخت حداکثر یک تطابق کامل دارد. علت این امر آن است که اگر E_1 و E_2 دو تطابق کامل باشند آنگاه $E_1 \cup E_2$ شامل دور خواهد بود اما درخت‌ها دوری ندارند. پس گزینه (۳) نادرست و گزینه (۴) درست است.

۱۲۲- گزینه (۳) صحیح است.

برای انتخاب اولین رأس، 10 انتخاب داریم. فرض کنید u_1 اولین رأس باشد. این رأس با 3 رأس دیگر مجاور است. پس برای دومین رأس، 3 انتخاب داریم. فرض کنید V_1 را انتخاب کرده باشیم. V_1 با 3 رأس مجاور است اما یکی از آن‌ها همان u_1 است. پس برای سومین رأس، 2 انتخاب داریم. فرض کنید u_2 را انتخاب کرده باشیم. در آخرین حرکت هم 2 انتخاب داریم فرض کنید V_2 انتخاب ما باشد.



تا اینجا با استفاده از قاعده‌ی ضرب داریم: $10\times3\times2\times2=120$

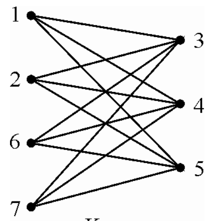
اکنون دقت کنید که هر مسیر دوبار شمرده می‌شود یک بار از ابتدا به انتها و یک بار هم از انتها به ابتدا پس جواب را باید بر 2 تقسیم کنیم:

$$\frac{120}{2}=60$$

۱۲۳- گزینه (۱) صحیح است.

درست است که طراح سوال، این گراف را گراف سه بخشی $k_{2,3,2}$ نامیده است اما اگر به شکل توجه کنیم، گراف داده شده در واقع همان گراف دو بخشی $k_{3,4}$ است. اگر رئوس 6 و 7 را هم به سمت چپ بیاورید، متوجه این مطلب می‌شوید:

حالا پاسخ دادن به سوال، بسیار ساده است.



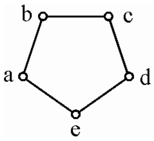
$K_{3,4}$

گراف $k_{n,m}$ که در آن $n\geq3$ و $m\geq3$ باشد، مسطح نیست. پس $k_{3,4}$ مسطح نیست. این گراف مدار اویلری ندارد زیرا دارای رئوس با درجه‌ی فرد است.

این گراف گذر اویلری ندارد زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد آن، بیش از 2 رأس است. گراف k_{n_1m} فقط در صورتی همیلتونی است که $n=m$ باشد. پس $k_{3,4}$ همیلتونی نیست. البته مسیر همیلتونی دارد مثلاً 7 5 6 4 2 3 1 مسیری همیلتونی است. هرگراف 2 بخشی، 2 رنگ‌پذیر است پس $k_{3,4}$ هم 2 رنگ‌پذیر است. کافیست رئوس 7 , 6 , 2 , 1 را با یک رنگ و رئوس 5 , 4 , 3 را با رنگ دیگری رنگ‌آمیزی کنید.

۱۲۴- گزینه (۳) صحیح است.

حکم (الف) درست است. برای آن که $M_1\cup M_2$ دو بخشی باشد، باید نشان دهیم که در $M_1\cup M_2$ هیچ دور به طول فردی وجود ندارد. این به سادگی ثابت می‌شود. برای مثال فرض کنیم $M_1\cup M_2$ یک دور به طول 5 مطابق شکل داشته باشد:



هرکدام از یال‌های این دور باید عضو M_1 یا عضو M_2 باشند. M_1 تطابق است پس یال‌هایش

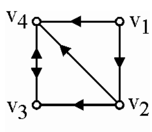
نباید رأس مشترک داشته باشند مثلاً M_1 می‌توانـد $M_1 = \{ab, cd\}$ باشـد. M_2 هـم یـک تطـابق است و مثلاً می‌تواند $M_2 = \{bc, de\}$ باشد. در این صورت یال ae نه عضو M_1 است و نه عضـو M_2. پس به تناقض می‌رسیم. به همین روش معلوم مـی‌شـود کـه هـیچ دور بـه طـول فـردی در $M_1 \cup M_2$ وجود ندارد. پس $M_1 \cup M_2$ دو بخشی است.

حکـم (ب) نادرسـت اسـت. نادرسـت بـودن آن بسـیار واضـح اسـت. بـرای مثـال در گـراف 

فرض کنـیم $M_1 = \{ab, cd\}$ و $M_2 = \{bc\}$ باشـد. M_1 و M_2 هـر دو تطابق‌های ماکسیمال هستند و $|M_1| = 2$ و $|M_2| = 1$ است پس نامسـاوی $|M_1| \le \frac{3}{2}|M_2|$ برقـرار نیست.

۱۲۵- گزینه (۳) صحیح است.

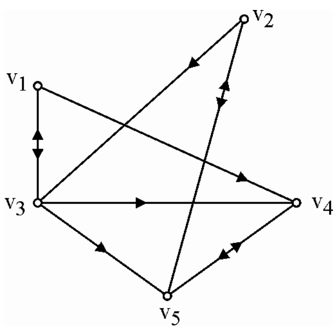
گرافـی بـا دنبالـه‌ی درجـات (الـف) را مـی‌تـوان رسـم کـرد. رئـوس ایـن گـراف را بـه ترتیـب (v_1, v_2, v_3, v_4) می‌نامیم.



(الف)

طبق اطلاعات داده شده در (الف) می‌توانیم گراف را رسم کنیم. برای مثـال v_1 رأسـی اسـت کـه ورودی ندارد اما دو خروجی دارد. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا به v_4 می‌رسیم که 3 ورودی و یک خروجی دارد.

گرافی با دنباله‌ی درجات (ج) هم می‌توان رسم کرد که در شکل آمده است:



اما دنباله درجات (ب) قابل ترسیم نیست. فرض کنید بخواهیم گرافی با رئـوس v_1, v_2, v_3 رسـم کنیم که مطابق با درجات داده شده در (ب) باشد.

v_1 دارای 2 درجه‌ی ورودی و 2 درجه‌ی خروجی اسـت. v_2 دارای 2 درجـه‌ی ورودی و 2

درجه‌ی خروجی است. بنابراین v_3 هم ناچار است دارای 2 درجه‌ی ورودی و 2 درجه‌ی خروجی باشد. پس دنباله درجات (ب) قابل ترسیم نیست.

۱۲۶- گزینه (۲) صحیح است.

گراف G دارای 16 رأس است که درجه‌ی همه‌ی آن‌ها 4 است. بنابراین مجموع درجات برابر با $4\times16=64$ است و تعداد یال‌ها برابر با نصف مجموع درجات است یعنی این گراف 32 یال دارد. $(e=32\ ,\ n=16)$

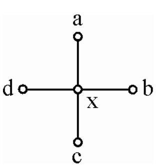
در هر گراف مسطح، طبق فرمول اویلر داریم $r=e-n+2$ پس تعداد نواحی این گراف $r=18$ است.

طبق صورت سوال همه‌ی نواحی این گراف، چه نواحی متناهی و چه ناحیه‌ی نامتناهی مرزی دارند که از 3 یا 4 یال تشکیل شده است. به عبارتی درجه‌ی هر ناحیه برابر با 3 یا 4 است. فرض کنیم x تعداد نواحی درجه 4 و y تعداد نواحی درجه 3 باشد. به وضوح $x+y=18$ است و در ضمن مجموع همه‌ی درجات نواحی، 2 برابر تعداد یال‌هاست یعنی $4x+3y=64$. با حل این دستگاه خواهیم داشت $x=10$ و $y=8$.

پس 8 ناحیه‌ی سه ضلعی و 10 ناحیه‌ی 4 ضلعی خواهیم داشت.

۱۲۷- گزینه (۳) صحیح است.

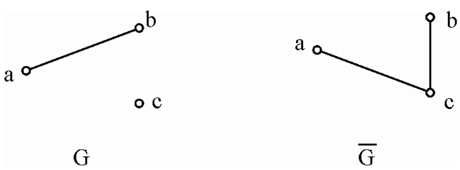
ابتدا از بین 100 رأس گراف، 4 تا انتخاب می‌کنیم تا بخش $\{a,b,c,d\}$ را تشکیل دهند سپس از بین 96 رأس دیگر یکی را برای بخش $\{x\}$ انتخاب می‌کنیم:



$$\binom{100}{4}\times 96$$

۱۲۸- گزینه (۱) صحیح است.

گزینه (۱) به وضوح غلط است برای مثال:



G و $\overline{G}$ هر دو دوبخشی هستند.

گزینه (۲) در متن درس مطرح شده است.

گراف دوبخشی منتظم به صورت $K_{n,n}$ است پس 2n رأس دارد. گزینه (۴) هم واضح است زیرا اگر G دوبخشی باشد در آن طول به دور فرد وجود ندارد پس در $G-e$ هم دور به طول فرد وجود ندارد.

۱۲۹- گزینه (۳) صحیح است.

هر درخت نابدیهی حداقل 2 برگ دارد و به ازای هر رأس میانی درجه‌ی d، تعداد $d-2$ برگ به آن اضافه می‌شود. پس هر رأس درجه‌ی 5 باعث اضافه شدن 3 برگ به درخت می‌شود.

$$l \geq 2+3(5-2)=11$$

۱۳۰- گزینه (۴) صحیح است.

رأس $\{1,2,3\}$ را در نظر بگیرید. این رأس با رأس‌های $\{1,x,y\}$ و $\{2,x,y\}$ و $\{3,x,y\}$ مجاور است که x و y باید عضو $\{4,5,\ldots,10\}$ باشند. بنابراین درجه‌ی این رأس برابر است با:

$$3\times\binom{7}{2}$$

همه‌ی رئوس دیگر هم به شکل مشابه همین درجه را دارند. تعداد کل رأس‌ها $\binom{10}{3}$ است.

$$\text{تعداد یال‌ها} = \frac{1}{2}\ (\text{مجموع درجات})$$

$$=\frac{3}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{3}=3780$$

۱۳۱- گزینه (۲) صحیح است.

فقط با توجه به q_{max} مسئله را حل می‌کنیم. کمترین درجه‌ی رأس‌ها $\delta=3$ است بنابراین در هر کدام از مؤلفه‌ها حداقل باید 4 رأس داشته باشیم. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها هنگامی به دست می‌آید که 3 مؤلفه‌ی K_7, K_4, K_4 داشته باشیم.

$$q_{max}=\binom{7}{2}+\binom{4}{2}+\binom{4}{2}=33$$

۱۳۲- گزینه (۱) صحیح است.

گراف G به وضوح اویلری نیست چون رأس درجه فرد دارد. برای مثال رأس 2 با رأس‌های شماره‌ی فرد مجاور است که تعداد آنها 9 تا است. از طرفی چون دو عدد متوالی همیشه نسبت به هم اولند پس مسیر ساده‌ی $2,3,4,\ldots,19,20$ یک مسیر همیلتونی در G است.

۱۳۳- گزینه (۲) صحیح است.

گراف $K_{n,m}$ دارای $n+m$ رأس و nm یال است. هر درخت فراگیر دارای $n+m-1$ یال است. بنابراین باید داشته باشیم: $nm=3(n+m-1)$

اگر $n=1$ باشد $m=3m$ به دست می‌آید که غیرممکن است زیرا $m\geq 1$ است.

اگر $n=2$ باشد $2m=3m+3$ است که غیرممکن است.

به همین ترتیب می‌بینیم که فقط دو حالت ممکن برای این تساوی داریم که $(n,m)=(4,9)$ و $(n,m)=(5,6)$ هستند. دقت کنید که $K_{n,m}$ با $K_{m,n}$ تفاوتی ندارد.

۱۳۴- گزینه (۳) صحیح است.

دو گراف K_4 با یک رأس برشی به هم متصل شده‌اند، بنابراین:

$$\tau(G)=4^{4-2}\times 4^{4-2}=2^8$$

۱۳۵- گزینه (۱) صحیح است.

(a) واضح است. درخت‌ها دوبخشی هستند و عدد رنگی آنها 2 است پس $|V|=|A|+|B|$ که A رئوس آبی و B رئوس قرمز هستند. از آنجا که $|A|+|B|=n$ پس حداقل یکی از آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است.

(b) واضح است زیرا در رئوس میانی به ازای هر ورود یک خروج داریم اما در ابتدا یک خروج داریم که ورودی نداشته و در انتها یک ورود داریم که خروجی ندارد.

بهتر بود از واژه‌ی گذر در این سؤال استفاده می‌شد.
